PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 19/20 20. Oktober 1941 42. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 21 am 15. Oktober 1941

INHALT:

Abhandlungen:

E. Justi, Versuche über den Einfluß der Isotopenzusammensetzung auf den elektrischen Widerstand und die Supraleitfähigkeit von Blei. S. 325.

A. Scheibe und U. Adelsberger, Normalfrequenz-Aussendung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt über den Deutschlandsender werktäglich 10 h 45 min für September 1941. S. 327.

J. Fischer, Stromverdrängung im zylindrischen Leiter, insbesondere von elliptischem Querschnitt. S. 327.

H. Hermann, Das Eindringen einer Walze in eine ebene Unterlage. S. 337.

W. Kolhörster und K. Lange, Ein erprobter Druckzähler, S. 341.

K. Oswatitsch, Bestimmung der Luftfeuchtigkeit mit Hilfe der Verdunstungstemperatur von Wasser. S. 343.

Nachrichten. S. 348.

Angebote. S. 348.

ABHANDLUNGEN

Versuche über den Einfluß der Isotopenzusammensetzung auf den elektrischen Widerstand und die Supraleitfähigkeit von Blei

Von E. Justi

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin-Charlottenburg)

1. Aufgabenstellung

Experimentelle[1]) und theoretische Untersuchungen über den Einfluß der Isotopenzusammensetzung auf den elektrischen Widerstand und die Supraleitfähigkeit des Metallgitters sind wohl deshalb bisher nicht durchgeführt worden, weil der geringe relative Massenunterschied zweier Isotope die charakteristische Temperatur Θ_D kaum beeinflußt, und weil man daher stillschweigend das elektrische Leitungsvermögen lediglich als Funktion der äußeren Elektronenanordnung ansieht, die ja bei den verschiedenen Isotopen übereinstimmt. Entsprechende Messungen scheinen aber in doppelter Hinsicht doch nicht trivial zu sein. Die neueren Untersuchungen über den elektrischen Leitungsmechanismus der Metalle (vgl. z. B. E. Justi[2])) haben gegenüber der älteren Theorie des freien isotropen Elektronengases die primäre Bedeutung des Ionengitters hervortreten lassen, und insofern brauchte eine Besetzung der Gitterpunkte mit verschieden schweren Ionen eventuell in unregelmäßiger Verteilung nicht bedeutungslos zu sein. Zwischen Supraleitfähigkeit und äußerer Elektronenanordnung ist überhaupt kein Zusammenhang bekannt, so daß ein Einfluß der Atomkerne auf den Eintritt der Supraleitfähigkeit zumindest nicht ausgeschlossen erschien.

Als einzige geeignete Substanz bietet sich das Blei dar, das nicht nur in seiner normalen Zusammensetzung (At.-Gew. 207,21) von 1,5 Proz. ^{204}Pb, 23,6 Proz. ^{206}Pb, 22,6 Proz. ^{207}Pb und 52,3 Proz. ^{208}Pb[3]) verfügbar ist, sondern auch in den bekannten Hönigschmidschen Atomgewichtspräparaten[4]) [5]) als fast reines Uranblei (93,3 Proz. ^{206}Pb und 4,9 Proz. ^{207}Pb nach Mattauch und Hauck[6])) und Thoriumblei hoher Konzentration (chem. At.-Gew. 207,77 statt 208,06 massenspektroskopisch). Herr Professor Hönigschmid hatte die große Freundlichkeit, seine einzigartigen Präparate für diese Messungen zur Verfügung zu stellen, so daß nachfolgend über vergleichende elektrische Messungen an Normalblei (doppelt gereinigte Qualität von de Haen) und Uranblei berichtet werden kann. Diesem aus Curit von Katanga gewonnenen Präparat (At.-Gew. 206,03) wurde zunächst deshalb der Vorzug vor dem Thoriumblei (At.-Gew. 207,77) gegeben, weil es fast frei von anderen Isotopen ist, während das kostbarere Thoriumblei ähnlich wie Normalblei als Gemisch anzusehen ist.

1) In diesem Zusammenhang ist lediglich die Untersuchung von W. Jaeger und H. von Steinwehr (Zeitschr. f. Phys. **7**, 111, 1921) zu erwähnen, die an Hg-Proben von 0,03 Proz. Dichteunterschied im flüssigen Zustand Änderungen des spezifischen Widerstandes im flüssigen Zustand auf einige 10^{-6} ausschließen konnten.

2) E. Justi, Zeitschr. f. techn. Phys. **12**, 315, 1940.

3) O. Hahn, S. Flügge und J. Mattauch, Physik. Zeitschr. **41**, 1, 1940.

4) O. Hönigschmid, Zeitschr. f. El.chemie **24**, 161, 1917.

5) O. Hönigschmid, Zeitschr. f. El.chemie **25**, 91, 1919.

6) J. Mattauch und V. Hauck, Naturwiss. **25**, 763, 1937.

2. Elektrischer Widerstand

Aus dem Uranbleiblech von 0,12 mm Dicke wurde ein Streifen von 2 mm Breite und 20 mm Länge geschnitten, der auf die eine Seite eines Glimmerblättchens gelegt wurde, das auf der anderen Seite einen Normalbleistreifen genau gleicher Abmessungen trug. An den Enden der beiden Streifen wurden Stromzuführungen (0,1 mm *Cu*-Draht) und Potentialdrähte (0,08 mm *Cu*-Draht) aufgelegt, mit Deckplättchen aus Glimmer belegt und das Ganze durch vier Neusilberfedern an den Kontaktstellen zusammengepreßt. Die Wahl genau gleicher Abmessungen hatte einerseits den Zweck, infolge übereinstimmender Wärmekapazität verschieden schnelle Temperaturänderung bei der Aufnahme von Erwärmungs- und Abkühlungskurven zu vermeiden und andererseits bei den in Serie geschalteten Bleiwiderständen nicht nur gleiche Stromstärke, sondern auch Stromdichte zu erzielen, deren Betrag auf die Ausbildung der Sprungkurve von Einfluß ist. Zur Verbesserung des Temperaturausgleiches waren die Glimmerdeckblätter mit einer U-förmig gebogenen Kupferfolie ummantelt.

Die Eispunktwiderstände der beiden Proben (Zahlentafel I) differieren um etwa 10 Proz., was sich aus der nicht ganz gleichmäßigen Dicke der Proben erklärt und kaum als Verschiedenheit der spezifischen Widerstände zu deuten ist. Dieselbe Zahlentafel gibt die bei der Temperatur siedender Luft (78,4° abs), siedenden (20,4° abs), erstarrenden (14,0° abs) und bei 2 Torr (~ 10° abs) sublimierenden Wasserstoffs gemessenen Widerstandsverhältnisse $r_T = R_{T°}/R_{273°}$ an.

Zahlentafel I.
Vergleichende Widerstandsmessungen an Normal- und Uranblei.

	Normalblei	Uranblei
$r_{78°}$	0,2525	0,2547
$r_{20°}$	$0{,}0294_8$	$0{,}0297_3$
$r_{14°}$	$0{,}0104_2$	$0{,}0103_9$
$r_{10°}$	$0{,}0022_6$	$0{,}0023_1$
R_{143} (Ohm)	0,012836	0,011629

Man ersieht hieraus, daß die r_T-Werte bei den beiden tiefsten Temperaturen innerhalb der möglichen Temperaturschwankungen (T^5-Gesetz!) untereinander übereinstimmen, ebenso wie die $r_{14°}$-Werte mit dem auf ideale Reinheit und Spannungsfreiheit reduzierten $r_{14°}$-Wert nach Tuyn[7]) $r_{14°} = 0{,}01038$ bzw. Meißner und Voigt[8]) $r_{14} = 0{,}0104$; hieraus ist zu schließen, daß bei beiden Proben der Restwiderstand extrem klein ($z < 5 \cdot 10^{-5}$) ist. Bei 20,4° abs ist der Widerstand des Uranbleis um 0,83 Proz., bei 78,4° abs um 0,88 Proz. größer als der von Normalblei. Diese durch Verunreinigungen also nicht zu erklärende Differenz dürfte kaum auf eine Temperaturdifferenz zwischen den beiden Bleistreifen zurückzuführen sein, da diese bei 78° z. B. 0,6° betragen und damit die bei dieser Anordnung zuzugebenden Temperaturschwankungen größenordnungsmäßig übertreffen müßte. Da dieser Widerstandsunterschied wegen der regulären Kristallstruktur des *Pb* auch nicht auf kristallographische Anisotropien wie z. B. Walztexturen zurückgeführt werden kann, wird man es zwar für möglich halten, daß der elektrische Widerstand von Uranblei etwas langsamer als der von gewöhnlichem Blei abfällt; indessen soll dieser Unterschied wegen seines geringen Betrages nicht als sicher angesehen werden.

Bei Anwendung der Grüneisenschen Widerstandsformel[9]) entspräche dieser Unterschied der Temperaturfunktion einer Erniedrigung der charakteristischen Temperatur $\Theta_{Pb} = 86°$[9]) um + 0,2 Proz.; ein lediglich durch Erniedrigung der schwingenden Atommasse im Verhältnis 207,21/206,03 verursachter Effekt müßte umgekehrt eine Erhöhung der charakteristischen Temperatur um den Faktor

$$\sqrt{207{,}21/206{,}03} = 1{,}003$$

bewirken, also eine ungefähr entgegengesetzt gleiche Änderung.

3. Supraleitfähigkeit

Schwieriger gestalteten sich vergleichende Messungen der Supraleitfähigkeit der beiden Bleiarten, weil die Übergangstemperatur von gewöhnlichem Blei (7,3° abs) gerade in dem schwer zugänglichen Temperaturbereich zwischen dem Siedepunkt des Heliums (4,22° abs) und der tiefsten mit sublimierendem Wasserstoff erreichbaren Temperatur (etwa 9° abs) liegt. Um solche Zwischentemperaturen räumlich konstant zu erhalten und zeitlich langsam ändern zu können, wurde der schon bei der Untersuchung von Umwandlungserscheinungen kondensierter Gase bewährte Sorptionsthermostat des Verfassers[10]) benutzt. Hier wird zunächst bei Wasserstofftemperaturen Heliumgas an Aktivkohle isotherm adsorbiert und dann aus der inzwischen thermisch isolierten Kohle adiabatisch desorbiert, wobei die Desorptionswärme die Temperatur von 10° auf etwa 6° abs zu senken vermag.

7) W. Tuyn, Comm. Leiden Nr. 196b, 1929.
8) W. Meißner und B. Voigt, Ann. d. Phys. **7**, 761, 1930.
9) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. **16**, 530, 1933.
10) E. Justi, Ann. d. Phys. **9**, 571, 1931; Zeitschrift f. Phys. **87**, 273, 1933.

Bei dem Versuch wurden die wiederum in Serie geschalteten *Pb*-Widerstände mit Meßströmen bis zu 0,25 Ampere belastet und die Spannungsabfälle der beiden Präparate an zwei Projektionsgalvanometer angelegt, an deren Lichtzeigern somit der Verlauf der beiden Abkühlungs- bzw. Erwärmungskurven vergleichend verfolgt werden konnte. So konnte nicht nur festgestellt werden, daß auch Uranblei supraleitend wird, sondern daß die beiden Sprungkurven sowohl bei Erwärmung wie Abkühlung weitgehend übereinstimmen. Der Übergang normalleitend $\rightleftharpoons$ supraleitend konnte so langsam vollzogen werden, daß größere Unterschiede der Sprungkurven als einige $^1/_{1000}{}^\circ$ ausgeschlossen werden können.

Das Ergebnis, daß auch Uranblei supraleitend wird, bestätigt die von Clusius[11]) aufgefundene Regel, wonach alle Metalle eines bestimmten Atomvolumenbereiches ($11 < V_A < 21$) supraleitend werden, denn die Atomvolumina von Normalblei und Uranblei stimmen überein. Daß die Sprungkurven beider Bleiarten identisch sind, kann theoretisch noch nicht erklärt und einstweilen nur festgestellt werden.

Herrn Professor Dr. O. Hönigschmid danke ich für die Überlassung seiner Präparate und den Herren Professor Dr. M. v. Laue und Geheimrat Professor Dr. E. Grüneisen für anregende Diskussionen.

11) K. Clusius, Zeitschr. f. El.chemie **38**, 312, 1932 (Abb. 12).

Berlin-Charlottenburg 2, Kältelaboratorium der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.

(Eingegangen 9. September 1941)

Normalfrequenz-Aussendung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt über den Deutschlandsender werktäglich 10 h 45 min.

Die Zahlen der Spalte 2 geben an, um wieviel in 10^{-9} des Wertes der Betrag der ausgestrahlten Frequenz vom Sollwert 1000,000000 Hz abweicht. Die Abweichung wurde mittels der Quarzuhren der Reichsanstalt bestimmt.

1	2	1	2
September 1941		September 1941	
Tag	Abweichung	Tag	Abweichung
1.	+ 14	16.	+ 19
2.	+ 8	17.	+ 17
3.	+ 12	18.	+ 17[1])
4.	+ 6	19.	+ 17
5.	+ 10	20.	+ 16
6.	+ 9	21.	—
7.	—	22.	+ 23
8.	+ 14	23.	+ 19
9.	+ 11	24.	+ 21
10.	+ 11	25.	+ 20
11.	+ 8	26.	+ 14
12.	+ 12	27.	+ 14
13.	+ 13	28.	—
14.	—	29.	+ 16
15.	+ 13	30.	+ 18

1) Amplitudenschwankung des Senders.

Berlin-Charlottenburg, den 8. Oktober 1941.

Physikalisch-Technische Reichsanstalt, Abteilung II.

Im Auftrage:

A. Scheibe, U. Adelsberger.

Stromverdrängung im zylindrischen Leiter, insbesondere von elliptischem Querschnitt

Von J. Fischer

Inhalt:

1. Zwei Betrachtungsweisen der elektromagnetischen Vorgänge
2. Die Randbedingungen. Formulierung der Aufgabe
3. Der elliptische Zylinder

1. Zwei Betrachtungsweisen der elektromagnetischen Vorgänge

Wir kennzeichnen durch die Koordinate z die Achsenrichtung eines einzelnen, langen zylindrischen Leiters von beliebigem, aber längs z gleichbleibenden Querschnitt (Draht, Stab, Schiene, Bändchen) und wenden uns solchen elektromagnetischen Vorgängen zu, bei denen im Zylinder in der Achsenrichtung ein Wechselstrom der Dichte $\mathfrak{G} = \varkappa\mathfrak{E}$ fließt und das magnetische Feld $\mathfrak{H}$ keine achsenparallele Komponente hat:

$$H_z = 0. \qquad (1, 1)$$

Zwei Betrachtungsweisen wurden bisher geübt:

a) Wellenvorgänge

Verlaufen die elektrischen und magnetischen Feldgrößen sinusförmig mit der Zeit, so sind sie auch örtlich sinusförmig entlang z veränderlich; jede Feldkomponente F kann also dargestellt werden als

$$F = Re\{F_0 e^{i(\omega t \mp q z)}\} \tag{1, 2}$$

mit der gegebenen Kreisfrequenz ω und der die örtliche Verteilung beschreibenden, vorläufig unbestimmten, aus dem Ergebnis der Rechnung zu ermittelnden komplexen Konstanten q. Die komplexe Größe F_0 ist Funktion nur der Koordinaten in der Querschnittsebene, im gleichen Zeitpunkt sind die Felder in verschiedenen Querschnittsebenen einander ähnlich, gleiche Feldintensitäten sind in verschiedenen Querschnittsebenen zu verschiedenen Zeiten vorhanden (Welle).

Kennzeichnend für die Drahtwellen ist:

α) Das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ ist aus einer achsenparallelen Komponente und aus achsennormalen Komponenten aufgebaut, Oberflächenladungen spielen also eine Rolle.

β) Die Differentialgleichung der Vorgänge ist (i imaginäre Einheit, $\varkappa$ spezifische elektrische Leitfähigkeit, $\overline{\mu}$ absolute Permeabilität, $\overline{\varepsilon}$ absolute Dielektrizitätskonstante)

$$\Delta Z + h_i^2 Z = 0\,; \qquad h_i^2 = -\,i\omega\varkappa\overline{\mu} - q^2 \tag{1, 3a}$$

im Innern des leitenden Zylinders und

$$\Delta Z + h_a^2 Z = 0\,; \qquad h_a^2 = \omega^2\overline{\varepsilon}\overline{\mu} - q^2 \tag{1, 3b}$$

im Außenfeldraum [ΔZ ist wegen Gleichung (1, 2) unabhängig von z]. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ werden zweckmäßig durch die bekannten Vorschriften

$$\mathfrak{E} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{P}\,; \qquad \mathfrak{H} = \operatorname{rot}\left\{\varkappa\mathfrak{P} + \overline{\varepsilon}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial t}\right\} \tag{1, 4}$$

aus einem gemeinsamen Stammvektor (Hertzschen Potential) $\mathfrak{P}$ abgeleitet. Dieser besteht unter unserer Voraussetzung $H_z = 0$, wie man sich leicht überzeugt, einzig aus einer achsenparallelen Komponente

$$P_z = Re\{Z e^{i(\omega t \mp q z)}\}\,, \tag{1, 3c}$$

ein Umstand, der die Durchführung der Rechnung wesentlich vereinfacht.

γ) In sehr großer senkrechter Entfernung r von der Achse z verhalten sich die Feldkomponenten bei jeder Querschnittsform so wie beim Runddraht, also wie Zylinderfunktionen dritter Art (Hankelsche) vom komplexen Argument $h_a r$, sie nehmen demnach etwa exponentiell ab.

Daß aus physikalischen Gründen ausschließlich komplexes Argument in Frage kommt, hat Sommerfeld in einer klassischen Arbeit[1]) gezeigt; die komplexe Größe q ist also für das Außenfeld von wesentlicher Bedeutung, vgl. h_a in Gleichung (1, 3b). In dieser Abhandlung hat Sommerfeld die bisher einzig gelungene vollständige Lösung der Aufgabe durchgeführt; sie betrifft Drahtwellen entlang einem Runddraht, wofür die Lösung in einem geschlossenen Ausdruck möglich ist; in analogem Rechnungsgang wird man bei anderen Querschnitten auf Lösungen in Form von Reihenentwicklungen geführt. Der praktischen — zahlenmäßigen — Durchführung solcher Lösungen stehen bis heute offenbar unüberwindbar große Schwierigkeiten entgegen.

b) Quasistationäre Betrachtungsweise

In jedem Augenblick des veränderlichen Zustandes wird das magnetische Feld so berechnet, wie wenn die augenblickliche Stromdichte zeitlich konstant wäre. Die Untersuchung beschränkt sich auf eine beliebige, zur Achse senkrechte Querschnittsebene: $\partial/\partial z = 0$, in verschiedenen Querschnittsebenen sind die Felder zu gleichen Zeiten einander gleich.

1) A. Sommerfeld, Wied. Ann. **67**, 233, 1899; auch in: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, herausgegeben von Ph. Frank und R. v. Mises, 2. Auflage 1927, S. 526, insbesondere § 1,4 S. 533. Vieweg, Braunschweig.

Kennzeichnend für die Vorgänge ist:

α) Die Stromdichte $\mathfrak{G} = \varkappa \mathfrak{E}$ besteht ausschließlich aus einem achsenparallelen Anteil G, achsennormale elektrische Komponenten und Oberflächenladungen werden nicht in Betracht gezogen[2]). — Setzen wir somit

$$G = Re\{G_0 e^{-i\omega t}\}\,, \tag{1, 5}$$

so ist die Differentialgleichung des Vorganges

$$\Delta A + k^2 A = 0\,; \qquad k^2 = +\,i\omega\varkappa\bar{\mu} \tag{1, 6a}$$

im Leiterinnern,

$$\Delta A = 0 \tag{1, 6b}$$

im Außenraum. Hierin ist A definiert durch

$$A_z = Re\{A e^{-i\omega t}\} \tag{1, 6c}$$

und A_z ist die z-Komponente eines quellenfreien vektoriellen Potentials $\mathfrak{A}$, durch das Strömung und Magnetfeld bestimmt sind vermöge

$$G_0 = k^2 A\,, \qquad \mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}\,. \tag{1, 7}$$

β) In sehr großer Entfernung r von der Achse z verläuft A bei jeder Querschnittsform wegen $\oint \mathfrak{H}\, d\mathfrak{r} = I$ proportional zu $\ln r$.

Für die Berechnung des inneren Wechselstromwiderstandes $R + i\omega L_i$ hat sich in den untersuchten Fällen die quasistationäre Betrachtungsweise in jedem Fall als ausreichend erwiesen[3]).

2. Die Randbedingungen, Formulierung der Aufgabe

Gleichung (1, 7) lautet in rechtwinkligen Koordinaten x, y:

$$G_0 = k^2 A\,, \qquad H_{0x} = \frac{\partial A}{\partial y}\,, \qquad H_{0y} = -\frac{\partial A}{\partial x}\,. \tag{2, 1}$$

Wir fragen nach den Werten an der Oberfläche des Leiters, beispielsweise bei einem prismatischen Körper mit dem Querschnitt nach Fig. 1. Wir versuchen, z. B. längs der Kante $x = a$ die Stromdichte konstant anzunehmen: $G_0(a) \overset{!}{=} \text{const}_y$. Aus dieser Setzung folgt nach Gleichung (2, 1) unmittelbar $H_{0x}(a) = 0$: das magnetische Feld durchdringt die Kante $x = a$ nicht. Entsprechendes gilt für die Kante $y = b$. Nimmt man also konstante Stromdichte am Umfang an, so gibt es keinen Zusammenhang zwischen dem Magnetfeld im Außenraum und im Leiterinnern; die magnetischen Feldröhren können nicht durch die Oberfläche treten, sie sind im Leiterinnern eingesperrt.

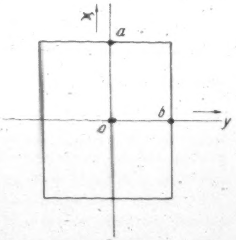

Fig. 1. Bezeichnungen beim rechteckigen Querschnitt.

Diese Bedingung ist sicher im allgemeinen nicht erlaubt. Wir kennen einen einzigen Fall, in dem sie genau zutrifft: beim Kreisquerschnitt. Hier hängt wegen der Symmetrie zur Achse bei allen Frequenzen von Null bis Unendlich die Stromdichte nirgends, daher auch am Umfang nicht, vom Azimut ab, daher hat das Magnetfeld am Umfang keine normale Komponente; die magnetischen Feldröhren durchdringen den Zylindermantel nicht. Die Stromverdrängung im Kreisquerschnitt, daher auch ihre Berechnung, bedeutet also nicht den Regelfall, sondern sie stellt eine einzigartige Ausnahme dar.

---

2) Um dies einzusehen, betrachtet man zweckmäßig die durch die Rücksicht auf Gleichung (1, 1) vereinfachten Maxwellschen Gleichungen, z. B. in rechtwinkligen Koordinaten x, y, z. Man erkennt dann die Alternative: entweder ist $\partial/\partial z \neq 0$, dann ist auch notwendig $E_x \neq 0$, $E_y \neq 0$ — so bei den unter a) beschriebenen Wellenvorgängen, für die somit die achsennormalen elektrischen Komponenten wesentliche Bindeglieder zwischen den Feldern innen und außen vorstellen und wesentlich sind für den längs z veränderlichen Vorgang — oder es ist $\partial/\partial z = 0$, dann ist notwendig $E_x = 0$, $E_y = 0$ — so in b).

3) Der innere Wechselstromwiderstand $R + i\omega L_i$ des Runddrahtes vom Radius b im Verhältnis zum Gleichstromwiderstand R_g ist nach der bekannten Formel

$$\frac{R + i\omega L_i}{R_g} = \frac{\varkappa b}{2}\,\frac{I_0(\varkappa b)}{I_1(\varkappa b)}$$

mit $\varkappa^2 = -i\omega\varkappa\bar{\mu}$ bei Rechnung nach b, jedoch mit $\varkappa^2 = -i\omega\varkappa\mu - q^2$ bei Rechnung nach a; die komplexe Größe q wird aus einer transzendenten Gleichung bestimmt, vgl. A. Sommerfeld a. a. O. Man findet, daß in allen praktisch vorkommenden Fällen q für die Zahlenrechnung im Leiterinnern gestrichen werden kann (nicht jedoch, wie gezeigt, für den Außenraum).

Bei der Behandlung der Wirbelströme in einem langen rechteckigen Leiter, der sich in einem achsenparallelen homogenen magnetischen Wechselfeld befindet, konnte Debye[4]) als Oberflächenbedingung konstante Magnetfeldstärke annehmen. Strutt hat die Stromverdrängung sowohl in einem rechteckigen[5]), wie in einem elliptischen[6]) Zylinder, der in Längsrichtung von einem Wechselstrom durchflossen wird, unter der Annahme konstanter Stromdichte an der Oberfläche berechnet, jedoch alsbald ausgesprochen[7]), daß diese Annahme nicht den allgemeinen Fall bedeuten könne. Man kann wohl diese Berechnung Strutts auf den wechselstromdurchflossenen Zylinder anwenden, wenn dessen magnetische Permeabilität beträchtlich größer ist als die des Außenraumes, denn in diesen Fällen wird man, wie schon im Gleichstromfall[8]), voraussetzen können, daß die magnetischen Feldröhren, die nach dem Brechungsgesetz aus dem Körper mit der großen Permeabilität entweder nahezu senkrecht oder überhaupt nicht austreten, im wesentlichen im Leiterinnern bleiben.

Kann man wenigstens für den Grenzfall äußerst hoher Frequenz, also hinreichend kleiner Eindringtiefe, eine einfache Oberflächenbedingung angeben? Der Ansicht Noethers[9]), daß in diesem Fall die Verteilung asymptotisch einer entlang dem Umfang konstanten Stromdichte zustrebe, hat Strutt[10]) mit Recht widersprochen und darauf hingewiesen, daß in diesem Grenzfall, in dem das magnetische Feld keine zum Umfang normale Komponente aufweist, Stromdichte und Magnetfeld am Umfang aus einer elektrostatischen Ladungsverteilung berechnet werden können, ein Verfahren, das sich als fruchtbar erwiesen hat[11]). Strutt hat auf diese Weise den Grenzfall des Hochfrequenzwiderstandes des elliptischen Zylinders ermittelt[12]), Cockcroft den des rechteckigen Prismas[13]). — Auch hier handelt es sich also um einen Sonderfall, die so gefundenen Ausdrücke für den Hochfrequenzwiderstand stellen den gleichen Grad der Annäherung vor, wie die Berechnung der Stromverdrängung im Kreisquerschnitt durch die Rayleighschen Formeln.

Im allgemeinen Fall treten also die magnetischen Feldröhren aus dem Leiterinnern in den Außenraum aus. Man muß somit das Feld im Außenraum zu der Berechnung heranziehen. Dann

4) P. Debye, Zeitschr. f. Math. u. Phys. **54**, 419—457, 1907.
5) M. J. O. Strutt, Ann. d. Phys. (4) **83**, 979—1000, 1927.
6) M. J. O. Strutt, Ann. d. Phys. (4) **84**, 485—506, 1927.
7) M. J. O. Strutt, Ann. d. Phys. (4) **85**, 781—793, 1928.
8) M. J. O. Strutt, Arch. f. Elektrotechn. **18**, 190—194, 1927; insbesondere Fig. 1.
9) F. Noether, Ann. d. Phys. (4) **84**, 775—778, 1927; insbesondere S. 777.
10) M. J. O. Strutt, Ann. d. Phys. (4) **85**, 787, 1928.
11) Zum Beispiel M. J. O. Strutt, Elektrotechn. Nachr. **6**, 269—276, 1931; H. Kaden, Arch. f. Elektrotechn. **28**, 818—825, 1934.
12) M. J. O. Strutt, Ann. d. Phys. (4) **85**, 788—793, 1928. Das gleiche Ergebnis fand H. Kaden a. a. O.

Hiernach ist bei einer Ellipse mit der großen Achse 2a und der kleinen Achse 2b die Stromdichte proportional zu

$$\frac{1}{a}\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\cos^2\eta}\,, \qquad (2,\ 2)$$

wobei der Asymptotenwinkel η von der großen Achse an gezählt wird. Die Stromdichte ist also in der großen Achse proportional zu $1/b$ und in der kleinen Achse zu $1/a$. Fig. 2 zeigt die Verteilung der Stromdichte bei $a/b = 4$. Der Verlustwiderstand R im Verhältnis zum Gleichstromwiderstand R_g wird erhalten zu

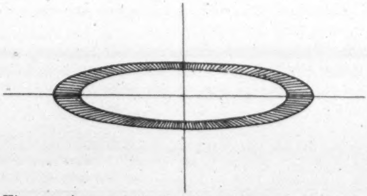

Fig. 2. Asymptotische Verteilung der Stromdichte beim elliptischen Querschnitt.

$$\frac{R}{R_g} = \frac{b}{\pi\delta}\cdot\mathbf{K}\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\omega\bar{\mu}}{2\pi R_g}}\cdot\psi\left(\frac{b}{a}\right); \qquad (2,\ 3)$$

hierin ist $\delta = 1\Big/\sqrt{\frac{1}{2}\omega\varkappa\bar{\mu}}$ die Eindringtiefe, vgl. Gleichung (3, 11), $\mathbf{K}\left(\frac{c}{a}\right)$ das vollständige elliptische Integral erster Gattung mit dem Modul $\frac{c}{a} = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$, ψ schließlich die von Strutt a. a. O. wiedergegebene Funktion

$$\psi\left(\frac{b}{a}\right) = \sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\mathbf{K}\left(\frac{c}{a}\right), \qquad (2,\ 4)$$

die allein durch das Achsenverhältnis bestimmt ist ($b/a = 0: \psi = 0$; $b/a = \infty: \psi = \pi/2$). Voraussetzung ist also $b/\delta \gg 1$, mindestens $b/\delta > 1$. Für $a/b \gg 1$ (ungefähr: rechteckige Schiene) folgt hieraus

$$\frac{R}{R_g} = \frac{b}{\delta}\cdot\frac{1}{\pi}\ln\frac{4a}{b}; \qquad \delta \ll b \ll a \qquad (2,\ 5)$$

Der Kehrwert von R ist also weder dem Querschnitt proportional, wie bei Gleichstrom, noch auch dem Umfang, wie es der Fall sein müßte, wenn die Stromdichte am Umfang konstant wäre.

13) J. D. Cockcroft, Proc. Roy. Soc. London (A) **122**, 533—542, 1929.

müssen nach den elektromagnetischen Grundgesetzen an der Leiteroberfläche sowohl das vektorielle Potential A wie auch die Ableitung von A nach der Normalen stetig sein.

Ebensogut wie durch die bekannte Integralgleichung[14]) wird somit die Stromverdrängung in zylindrischen Leitern durch folgende, gleichfalls an sich bekannte Angaben vollständig bestimmt:

α) Voraussetzungen: $H_z = 0$, $G = G_z$, $\partial/\partial z = 0$. $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ nach Abspaltung des Zeitfaktors $e^{-i\omega t}$ aus $G_0 = k^2 A$, $\mathfrak{H} = \text{rot}\,\mathfrak{A}$; Vektorpotential $\mathfrak{A}$ besteht nur aus Komponente $A_z = Re\{A e^{-i\omega t}\}$ in Achsenrichtung z.

β) Differentialgleichung: $\Delta A + k^2 A = 0$ innen, $\Delta A = 0$ außen.

γ) An der Leiteroberfläche: A stetig und Normalableitung von A stetig.

δ) Randbedingungen[15]): G, daher A, überall, also auch im Nullpunkt endlich. In unbegrenzt großem Abstand r von der Achse jedoch verhält sich A wie $\ln r$.

ε) Symmetriebedingungen, falls ausgezeichnete Richtungen vorhanden sind, wie bei Rechteck und Ellipse.

Auf Grund dieser Formulierung behandeln wir im folgenden den elliptischen Zylinder. Ist die Ellipse schmal, so können die gewonnenen Formeln auch für den schmalen rechteckigen Querschnitt (Band, Schiene) gelten. Ohne einen vollständigen Literaturnachweis geben zu wollen, sei daran erinnert, daß Näherungen für den rechteckigen Querschnitt unter verschiedenen Bedingungen von Schwenkhagen[16]) und von Dwight[17]) angegeben worden sind. Für den Wechselstromwiderstand einer schmalen Schiene findet man ferner im Handbuch der Physik einen einfachen geschlossenen Ausdruck[18]). Die ihm zugrunde liegende Stromverteilung strebt mit wachsender Frequenz einem Strombelag ausschließlich an den beiden langen Seiten des Rechteckes $y = \pm b$ in Fig. 1 zu. In Wirklichkeit wird mit wachsender Frequenz die Strömung sich auch gegen die schmalen Seiten $x = \pm a$ drängen, ähnlich wie bei der schmalen Ellipse, vgl. Fig. 2, und dies wird sich um so mehr bemerklich machen, je schmaler ($a > b$) das Rechteck ist. Die angegebene Formel stimmt somit nur für den theoretischen Fall des Ausschnitts aus einem in Richtung $\pm x$ der Fig. 1 unbegrenzten ebenen Blech, wofür sie seit langem bekannt ist[19]), auf eine Schiene von endlicher Höhe ist sie nicht anwendbar. Den elliptischen Zylinder hat Lettowski[20]) auf Grund der obigen Formulierung näherungsweise behandelt und z. B. für niedere Frequenzen Näherungsausdrücke für den inneren Wechselstromwiderstand gewonnen. Schließlich hat Groß[21]) mathematisch interessante Näherungsverfahren für Rechteck und Ellipse entwickelt.

3. Der elliptische Zylinder

Die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z werden unter Beibehaltung der Achsenrichtung z in die Koordinaten ξ, η, z des elliptischen Zylinders überführt durch

$$x = c\,\mathfrak{Cof}\,\xi \cos\eta\,, \qquad y = c\,\mathfrak{Sin}\,\xi \sin\eta\,, \qquad \frac{x^2}{\mathfrak{Cof}^2\,\xi} + \frac{y^2}{\mathfrak{Sin}^2\,\xi} = c^2\,, \qquad \frac{x^2}{\cos^2\eta} - \frac{y^2}{\sin^2\eta} = c^2\,. \tag{3, 1}$$

Die Kurven $\xi = \text{const}$ sind also konfokale Ellipsen mit der linearen Exzentrizität c und den halben Achsen $c\,\mathfrak{Cof}\,\xi$ und $c\,\mathfrak{Sin}\,\xi$, die Kurven $\eta =$ sind die dazu senkrechten konfokalen Hyperbeln. ξ geht von Null bis Unendlich, $\xi = \xi_1 = \text{const}$ beschreibt den Umfang des Leiters mit der halben großen Achse $a = c\,\mathfrak{Cof}\,\xi_1$ und der halben kleinen Achse $b = c\,\mathfrak{Sin}\,\xi_1$. Der Asymptotenwinkel η geht von $-\pi$ bis $+\pi$. Fig. 3. Das Linienelement ist

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = e(d\xi^2 + d\eta^2)\,, \qquad e = c^2(\mathfrak{Cof}^2\,\xi - \cos^2\eta) = \frac{c^2}{2}(\mathfrak{Cof}\,2\xi - \cos 2\eta)\,. \tag{3, 2}$$

Für $\xi \to \infty$ wird die sehr große Entfernung r vom Mittelpunkt:

$$r \to \frac{1}{2}\,c e^{\xi}\,. \tag{3, 2a}$$

14) Ch. Manneback, Journ. Math. Phys. **1**, 124, 1922; M. J. O. Strutt, wie Anm. 7.

15) Die Eigentümlichkeit der Aufgabe wurde auch schon so formuliert, daß „die zur Lösung notwendige Randbedingung am Leiterumfang fehle". Die Randbedingung fehlt nicht, sie liegt im Unendlichen. — Der Bezug auf den Gesamtstrom durch $I = \int G\,df$ oder $I = \oint H_s\,ds$ ersetzt die „fehlende" Randbedingung im allgemeinen nicht, beim Kreisquerschnitt nur scheinbar aus dem angegebenen Grund.

16) H. Schwenkhagen, Arch. f. Elektrotechn. **17**, 537, 1927.

17) H. B. Dwight, Proc. Am. Inst. El. Engng. **34**, 1770, 1915.

18) Handbuch der Physik, herausgegeben von Geiger und Scheel, **13**, 96, 1927. Springer, Berlin.

19) J. J. Thomson, Electrician **28**, 597, 1892.

20) F. Lettowski, Arch. f. Elektrotechn. **29**, 556—576, 1935.

21) H. B. Groß, Arch. f. Elektrotechn. **34**, 241—268, 1940.

Nach diesen Vorbereitungen schreiben wir die drei Feldkomponenten aus Gleichung (1, 7):

$$G_0 = k^2 A\,, \qquad H_{0\xi} = \frac{1}{\sqrt{e}}\,\frac{\partial A}{\partial \eta}\,, \qquad H_{0\eta} = \frac{-1}{\sqrt{e}}\,\frac{\partial A}{\partial \xi}\,. \tag{3, 3}$$

Die Differentialgleichung $\Delta A + k^2 A = 0$ für das Leiterinnere lautet hier:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} + 2\,h^2\,(\mathfrak{Cof}\,2\,\xi - \cos 2\,\eta)\,A = 0 \tag{3, 4}$$

mit der Abkürzung

$$2\,h^2 = \frac{k^2 c^2}{2} = \frac{1}{2}\,i\omega\varkappa\bar{\mu}c^2\,. \tag{3, 5}$$ [22]

Durch den Bernoulli-Ansatz

$$A = v(\xi)\cdot w(\eta) \tag{3, 6}$$

zerfällt Gleichung (3, 4) in die zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + v^2(-\lambda + 2\,h^2\,\mathfrak{Cof}\,2\,\xi) = 0\,, \tag{3, 7}$$

$$\frac{d^2 w}{d\eta^2} + w^2(+\lambda - 2\,h^2 \cos 2\,\eta) = 0\,, \tag{3, 8}$$

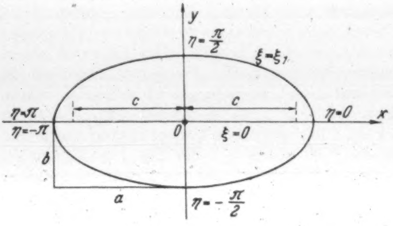

Fig. 3. Bezeichnungen beim elliptischen Querschnitt.

in denen noch über die Separationskonstante λ verfügt werden muß.

Geht man einmal um die Ellipse herum, so muß A wieder denselben Wert annehmen: Die Winkelfunktion $w(\eta)$ muß mit $2\,\pi$ periodisch sein. Für bestimmte Wertepaare λ, h^2 bestehen solche periodischen Lösungen der Gleichung (3, 8), die als die Mathieuschen Funktionen des elliptischen Zylinders[23] $ce_n(\eta; h^2)$, $se_n(\eta; h^2)$ bekannt sind, jedoch gibt es nicht für jedes beliebige Wertepaar λ, h^2 eine periodische Lösung, vielmehr hängen für jede solche periodische Lösung λ und h^2 in bestimmter Weise miteinander zusammen (in unserem Fall ist für jede Mathieusche Funktion das zugehörige λ eine bestimmte Funktion des vorgegebenen h^2). Ersetzt man η durch $i\xi$ in Gleichung (3, 8), so erhält man Gleichung (3, 7). Die Lösungen von Gleichung (3, 7) nennen wir zugeordnete Mathieusche Funktionen $\mathfrak{Ce}_n(\xi; h^2) = ce_n(i\,\xi; h^2)$, $i\,\mathfrak{Se}_n(\xi; h^2) = se_n(i\,\xi; h^2)$. — Der Parameter h^2 ist hier nach Gleichung (3, 5) stets eine imaginäre Zahl. Im vorliegenden Fall kommen zur Lösung nur die überall endlichen Mathieuschen Funktionen erster Art in Betracht. Die Symmetrie zu den beiden Achsen läßt sich so ausdrücken, daß in jeder der beiden Achsen das magnetische Feld nur senkrecht zur Achsenrichtung verläuft:

$$H_{0\xi} = 0 \text{ für } \eta = 0, \pi/2, -\pi, -\pi/2 \ldots \tag{3, 9}$$

22) Im Vergleich mit der Eindringtiefe einer ebenen elektromagnetischen Welle in einen ebenen unbegrenzten leitenden Halbraum

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\varkappa\bar{\mu}}} \tag{3, 11}$$

wird

$$|2\,h^2| = \left|\frac{k^2 c^2}{2}\right| = \frac{c^2}{\delta^2} = \frac{a^2}{\delta^2} - \frac{b^2}{\delta^2}\,; \tag{3, 12}$$

ist δ klein im Vergleich zur kleinen Achse b, so sind die von Strutt angegebenen asymptotischen Ausdrücke [Gleichung (2, 3)] anwendbar. Vom Kreisquerschnitt weiß man, daß die für hinreichend kleine Eindringtiefe geltenden asymptotischen (Rayleighschen) Ausdrücke schon dann, wenn die Eindringtiefe δ und der halbe Radius $b/2$ miteinander vergleichbar werden, zahlenmäßig keine allzu schlechte Näherung ergeben ($R/R_g = b/2\,\delta$ asymptotisch für $b/2\,\delta \gg 1$; für $b/2\,\delta > 1$ bessere Näherung $R/R_g \approx b/2\,\delta + 1/4$).

23) Mathematische Grundlagen: M. J. O. Strutt, Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik, Band 1 der „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete", Springer, Berlin 1932 (künftig zitiert als Strutt, M.-F.), E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, 3. Aufl., Abschn. XI, S. 287–295. Teubner, Leipzig und Berlin 1938.

Dann kommen zur Lösung nur gerade Mathieusche Funktionen gerader Ordnungszahlen $2n$ in Betracht. Wir schreiben daher die Lösung im Innern (i) mit D_{2n} als Integrationskonstanten:

$$A_i(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n} \mathfrak{Ce}_{2n}(\xi, h^2)\, ce_{2n}(\eta, h^2)\,; \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \qquad (3, 10)$$ [24]

Im Außenraum (a) genügt der Differentialgleichung

$$\Delta A = 0 = \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} \qquad (3, 13)$$

und der Symmetriebedingung Gleichung (3, 9) das Integral

$$A_a(\xi, \eta) = p\xi + \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n} e^{-2n\xi} \cos 2n\eta\,; \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \qquad (3, 14)$$ [25]

Es erfüllt zugleich die Randbedingung im Unendlichen, denn es wird

$$p\xi \to p \ln r \text{ für } \xi \to \infty, \qquad (3, 15\text{a})$$

worin r den sehr großen Abstand von der Zylinderachse bedeutet, und dies ist der Wert von A_a im Unendlichen, wenn wir voraussetzen dürfen, daß die mit dem Summenzeichen geschriebene Summe in Gleichung (3, 14) in dieser Grenze einen endlichen Betrag nicht überschreitet. Es ist daher an dieser Stelle schon nahegelegt, daß in Bezug auf den Gesamtstrom I_0 gilt

$$p \text{ prop. } I_0\,. \qquad (3, 15\text{b})$$

Die Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen an der Leiteroberfläche:

$$A_i = A_a \quad \text{und} \quad \frac{\partial A_i}{\partial \xi} = \frac{\partial A_a}{\partial \xi} \quad \text{für} \quad \xi = \xi_1 \text{ und alle } \eta \qquad (3, 16)$$

führt zur Bestimmung der Integrationskonstanten D_{2n}, K_{2n}. Mit Gleichung (3, 10) und (3, 14) muß also gelten:

$$p\xi_1 + K_0 + \sum_{n=1}^{\infty} K_{2n} e^{-2n\xi_1} \cos 2n\eta = \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n} \mathfrak{Ce}_{2n}\xi_1\, ce_{2n}\eta\,, \qquad (3, 17)$$

$$p - \sum_{n=1}^{\infty} 2nK_{2n} e^{-2n\xi_1} \cos 2n\eta = \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n} \mathfrak{Ce}'_{2n}\xi_1\, ce_{2n}\eta\,. \qquad (3, 18)$$

Hier ist in den Mathieuschen Funktionen der Parameter h^2 nicht mehr angeschrieben und die Abkürzung benutzt

$$\mathfrak{Ce}'_{2n}\xi_1 \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \mathfrak{Ce}_{2n}\xi\right)_{\xi=\xi_1} \qquad (3, 18\text{a})$$

Den Gleichungen (3, 17, 18) kann man darum genügen, weil die Winkelfunktionen periodische Funktionen sind; man kann sie also in Fouriersche Reihen entwickeln. Wir brauchen hier:

$$ce_{2n}(\eta; h^2) = A_{2n,0} + \sum_{r=1}^{\infty} A_{2n,2r} \cos 2r\eta\,; \qquad r = 1, 2, 3 \ldots \qquad (3, 19)$$ [26]

Die Koeffizienten $A_{2n,0}$, $A_{2n,2r}$ sind Funktionen von h^2. Ihre von **Mathieu** angegebenen Entwicklungen[27]) nach steigenden Potenzen von h^2 sind für kleine Werte von h^2 numerisch brauchbar. Wie man sieht, sind alle Glieder $A_{2n,0}$ unabhängig von η, sie verschwinden für $h^2 \to 0$ wie h^{2n}, ferner sind die Glieder mit $r = n$, also die $A_{2n,2n} \cos 2n\eta$ unabhängig von h^2, daher die einzigen in jeder Entwicklung, die für $h^2 \to 0$ von Null verschieden bleiben; da aus Gleichung (3, 19) die Funktion nur bis auf einen willkürlichen Faktor bestimmt ist, hat man die Freiheit, alle $A_{2n,2n} = +1$ zu setzen. Für größere Werte h^2, für die die erwähnten Mathieuschen Entwicklungen der $A_{2n,2r}$ versagen, hat

24) M. J. O. **Strutt**, wie Anm. 6.
25) F. **Lettowski**, a. a. O.
26) Eine Verwechslung der Entwicklungskoeffizienten $A_{2n,2r}$ mit dem Potential A, A_i, A_a ist wegen der Verschiedenheit der Indizes nicht zu befürchten.
27) **Strutt**, M.-F. S. 32.

man andere Berechnungsmethoden, Tabellen und graphische Darstellungen[28]) für die $A_{2n,2r}$[29]), ferner liegen zwischen diesen Koeffizienten und den Parametern h^2 und λ der Differentialgleichung (3, 8) ganz allgemeingültige Beziehungen in Form von Rekursionsformeln fest[30]). — Das hier Gesagte wurde zunächst für Mathieusche Funktionen mit reellen h^2 gefunden. Bei rein imaginärem Parameter h^2, wie er hier vorliegt, sind die Koeffizienten $A_{2n,0}$, $A_{2n,2r}$ im allgemeinen komplex. Auch in diesem Fall sind Rechenverfahren bekanntgeworden[31]), die ohne allzu großen Aufwand bei gegebenem h^2 die charakteristische Konstante λ und die zugehörigen Entwicklungskoeffizienten $A_{2n,2r}$ zu ermitteln gestatten; einige Wertetabellen[31]) und graphische Darstellungen[32]) liegen gleichfalls vor. Für die zugeordneten Funktionen sind die Entwicklungen von Heine nach Zylinderfunktionen J_{2r} geeignet:

$$\mathfrak{Ce}_{2n}(\xi;h^2) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2n,2r}(-1)^r J_{2r}(kc\,\mathfrak{Cof}\,\xi)\,, \qquad (3,20)$$

worin $kc = 2h$ nach Gleichung (3, 5) ist. Hieraus kommt für Gleichung (3, 17), (18), (18a) einfach:

$$\mathfrak{Ce}_{2n}\xi_1 = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2n,2r}(-1)^r J_{2r}(ka)\,, \qquad (3,21\text{a})$$

$$\mathfrak{Ce}'_{2n}\xi_1 = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2n,2r}(-1)^r \frac{kb}{2}\{J_{2r-1}(ka)\,J_{2r+1}(ka)\}\,. \qquad (3,21\text{b})$$

Bei schmaler Ellipse $b \ll a$ ist also $\mathfrak{Ce}_{2n}\xi_1$ nur insoweit von b abhängig, als sich b in dem Parameter h^2 bemerklich macht, durch den die $A_{2n,2r}$ bestimmt werden; nach Gleichung (3, 5) ist dieser Einfluß gering. Dagegen ist $\mathfrak{Ce}'_{2n}\xi_1$ zu b unmittelbar proportional.

Die Entwicklung Gleichung (3, 19) in A_i und A_a benutzend, erhalten wir für $\xi = \xi_1$ in Gleichung (3, 17, 18):

$$p\xi_1 + \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n}e^{-2n\xi_1}\cos 2n\eta = \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n}\mathfrak{Ce}_{2n}\xi_1 A_{2n,0} + \sum_{r=1}^{\infty}\left\{\cos 2r\eta \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n}\mathfrak{Ce}_{2n}\xi_1 A_{2n,2r}\right\}, \qquad (3,22)$$

$$p - \sum_{n=0}^{\infty} 2nK_{2n}e^{-2n\xi_1}\cos 2n\eta = \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n}\mathfrak{Ce}'_{2n}\xi_1 A_{2n,0} + \sum_{r=1}^{\infty}\left\{\cos 2r\eta \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n}\mathfrak{Ce}'_{2n}\xi_1 A_{2n,2r}\right\} \qquad (3,23)$$

Hieraus kommt durch Vergleichen der Glieder mit $n = r$ beiderseits der Gleichungszeichen das System

$$\left.\begin{aligned}
p\xi_1 + K_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n}\mathfrak{Ce}_{2n}\xi_1 A_{2n,0}\,; & p &= \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n}\mathfrak{Ce}'_{2n}\xi_1 A_{2n,0}\\
K_2 e^{-2n\xi_1} &= \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n}\mathfrak{Ce}_{2n}\xi_1 A_{2n,2}\,; & -2K_2e^{-2n\xi_1} &= \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n}\mathfrak{Ce}'_{2n}\xi_1 A_{2n,2}\\
&\;\;\vdots & &\;\;\vdots\\
K_{2g}e^{-2g\xi_1} &= \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n}\mathfrak{Ce}_{2n}\xi_1 A_{2n,2g}\,; & -2gK_{2g}e^{-2n\xi_1} &= \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n}\mathfrak{Ce}'_{2n}\xi_1 A_{2n,2g}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (3,24)$$

Wichtig in erster Linie sind die D_{2n}. Durch Elimination erhält man für ihre Bestimmung aus Gleichung (3, 24)

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n,2g}(\mathfrak{Ce}'_{2n}\xi_1 + 2g\,\mathfrak{Ce}_{2n}\xi_1)D_{2n} = 0\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n,0}\mathfrak{Ce}'_{2n}\xi_1 D_{2n} = p\,,\\
&\qquad\qquad n = 0, 1, 2, \ldots;\quad g = 1, 2, 3, \ldots n\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (3,25)$$

Die Lösungen D_{2n} des unendlichen Systems linearer Gleichungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{2n,2g}D_{2n} = 0\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} Q_{2n}D_{2n} = p\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots;\quad g = 1, 2, 3, \ldots n \qquad (3,26)$$

werden bekanntlich rein formal mit Hilfe unendlicher Determinanten gefunden, indem man ebenso verfährt, wie man die Cramersche Regel zur Lösung eines endlichen Systems anwendet. Die Wirk-

28) Jahnke-Emde, S. 288–293.
29) Vgl. Strutt, M.-F., S. 34–35.
30) Zum Beispiel Jahnke-Emde, S. 287.
31) H. P. Mulholland und S. Goldstein, Phil. Mag. (7) **8**, 834–840, 1929.
32) Jahnke-Emde, S. 294–295

samkeit des Verfahrens ist an gewisse Voraussetzungen über die Konvergenz gebunden, für die an dieser Stelle der Rechnung Beweise in voller Allgemeinheit wohl kaum angegeben werden können. Bricht man für eine Näherungsrechnung die Entwicklung bei einer endlichen Anzahl von $n = g$ Gliedern ab, so ist das D_{2n} enthaltende Glied in A_i das letzte und die Entwicklung der $ce_{2n}\eta$ in jedem Glied von A_i ist abgebrochen bei dem Glied, das $\cos 2n\eta$ enthält. Man wird also die mit einem gewählten $n = g$ sich ergebenden D_{2n} bestimmen, hierauf $n = g$ vergrößern, die neuen Werte D_{2n} mit den alten vergleichen und auf diese Weise, wenn das Verfahren konvergiert, immer bessere Annäherungen an die wirklichen Werte erhalten. Nach Gleichung (3, 26) wird jede Konstante D_{2n} unabhängig von n proportional zu p[33]).

Man kann auch die Konstanten D_{2n}, K_{2n} dadurch bestimmen, daß man die Orthogonalitätseigenschaften der in Gleichung (3, 17, 18) stehenden Funktionen unmittelbar benutzt. Multipliziert man in dieser Absicht die beiden Gleichungen mit $\cos 2m\eta d\eta$, integriert zwischen $-\pi$ und $+\pi$ und läßt m alle Werte $m = 0, 1, 2\ldots$ durchlaufen, so erhält man ein Gleichungensystem, das nach leichter Elimination der K_{2n} mit Gleichung (3, 25) identisch ist. Multipliziert man andererseits Gleichung (3, 17, 18) mit $ce_{2m}\eta d\eta$, integriert zwischen $-\pi$ und $+\pi$ und läßt m alle Werte $m = 0, 1, 2\ldots$ durchlaufen, so erhält man die D_{2n} einzeln, ausgedrückt in Summen, deren Glieder die K_{2n} als Faktoren enthalten. Dies System ist also geeignet, nach leichter Elimination der D_{2n} ein zu Gleichung (3, 25) durchaus analoges System für die K_{2n} zu geben.

Wir stellen nun einen Bezug auf dem Gesamtstrom I_0 durch das Durchflutungsgesetz her. Es wird mit Hilfe der Gleichungen (3, 2), (3, 10)

$$I_0 = \oint H_{0s} ds = \left| \int_0^{2\pi} -\frac{\partial A_i}{\partial \xi} d\eta \right|_{\xi=\xi_1} = -\sum_{n=0}^{\infty} D_{2n} \mathfrak{Ce}'_{2n}\xi_1 \int_0^{2\pi} ce_{2n}\eta d\eta ; \qquad (3, 27)$$

es ist aber wegen Gleichung (3, 19)

$$\int_0^{2\pi} ce_{2n}\eta\, d\eta = 2\pi A_{2n,0},$$

daher ist

$$I_0 = -2\pi \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n} \mathfrak{Ce}'_{2n}\xi_1 A_{2n,0} ; \qquad (3, 28)$$

der Vergleich mit p in der ersten Zeile von Gleichung (3, 24) zeigt

$$p = \frac{-I_0}{2\pi}, \qquad (3, 29)$$

wie schon am Anfang in Gleichung (3, 15b) vermutet worden war.

Für die Ermittlung des inneren Wechselstromwiderstandes $R - i\omega L_i$ des elliptischen Zylinders im Verhältnis zu seinem Gleichstromwiderstand R_g ist zu bedenken, daß die Stromdichte am Umfang $\xi = \xi_1$ nicht konstant ist. Man geht daher zweckmäßig aus von dem durch die Oberfläche ins Innere dringenden Fluß des komplexen Energieströmungsvektors:

$$\tfrac{1}{2} \oint [\mathfrak{E}_0 \mathfrak{H}_0^*] d\mathfrak{f} = \overline{Q} - 2 i\omega \overline{W}_m = \tfrac{1}{2} I_0 I_0^* (R - i\omega L_i) . \qquad (3, 30)$$

Hieraus wird im vorliegenden Fall mit $E_0 = G_0/\varkappa$ erhalten

$$\frac{R - i\omega L_i}{R_g} = \frac{-k^2 ab\pi}{I_0 I_0^*} \left| \int_0^{2\pi} A_i \frac{\partial A_i^*}{\partial \xi} d\eta \right|_{\xi=\xi_1} \qquad (3, 31)$$

(durch den Stern * werden konjugierte Größen und Funktionen gekennzeichnet).

---

33) Das Bildungsgesetz der D_{2n} hat die Form

$$D_0 = \frac{p}{b_0 - b_2\alpha_2 - \cdots b_{2n}\alpha_{2n}} ; \qquad D_2 = \beta_2 D_0 , \ldots$$

mit Konstanten $b_0, b_2, \ldots, \alpha_2 \ldots, \beta_2 \ldots$, die aus den Koeffizienten der Gleichung (3, 25) gebildet sind.

Indem man nun

$$\left(A_i \frac{\partial A_i^*}{\partial \xi}\right)_{\xi=\xi_1} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} D_{2m} \mathfrak{Ce}_{2m}\xi_1 \, ce_{2m}\eta\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} D_{2n}^* \mathfrak{Ce}_{2n}'^*\xi_1 \, ce_{2n}^*\eta\right)$$

ausmultipliziert und postenweise die in Gleichung (3, 31) geforderte Integration ausführt, erhält man nur Integrale der Form

$$\int_0^{2\pi} ce_{2m}\eta \, ce_{2n}^*\eta \, d\eta \, .$$

Aus den Orthogonalitätseigenschaften der Mathieuschen Funktionen folgt, daß diese Integrale für alle Werte $m \neq n$ verschwinden:

$$\int_0^{2\pi} ce_{2m}\eta \, ce_{2n}^*\eta \, d\eta = 0 \quad \text{für} \quad m \neq n \, . \tag{3, 32}$$

Jedoch ist

$$\int_0^{2\pi} ce_{2n}\eta \, ce_{2n}^*\eta \, d\eta = q_{2n} \tag{3, 33}$$

die reelle Konstante

$$\frac{1}{\pi} q_{2n}(h^2) = 2 \, |A_{2n,0}|^2 + \sum_{r=1}^{\infty} |A_{2n,2r}|^2 . \tag{3, 34}$$

Somit wird aus Gleichung (3, 31):

$$\frac{R - i\omega L_i}{R_g} = - k^2 a b \pi \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{D_{2n}}{I_0}\right|^2 \mathfrak{Ce}_{2n}\xi_1 \mathfrak{Ce}_{2n}'^*\xi_1 \, q_{2n} \, . \tag{3, 35}$$

Mit der Bestimmung des Wechselstromwiderstandes, der Stromdichte $G_0 = k^2 A$, und des magnetischen Feldes $H_{0\xi}$, $H_{0\eta}$ — Gleichungen (3, 3, 10, 25, 35) — ist die Berechnung am Ziel.

Zur Handlichkeit und zum numerischen Gebrauch dieser vollständigen und strengen Lösung der Aufgabe würden von rein mathematischer Seite her zwei Umstände wesentlich beitragen: Es wäre zunächst erwünscht, daß mehr als bisher von den Eigenschaften der hier gebrauchten Funktionen $\mathfrak{Ce}_{2n}(\xi, h^2) = ce_{2n}(i\xi, h^2)$; $\mathfrak{Ce}_{2n}'(\xi, h^2) = \frac{\partial}{\partial \xi} \mathfrak{Ce}_{2n}(\xi, h^2)$; $ce_{2n}(\eta, h^2)$ bei rein imaginärem Parameter h^2 bekannt würde. Es könnten dann aus der vorgelegten allgemeinen Lösung Näherungen für besondere Voraussetzungen entwickelt werden, z. B. für kleine und große Beträge $|h^2|$ [Anschluß an die asymptotischen Ausdrücke von Strutt Gleichung (2, 2, 3)], ferner z. B. für kleines Achsenverhältnis b/a, wofür Entwicklungen erwünscht wären, die unabhängig von der Ordnungszahl n für kleine Werte ξ, jedoch beliebige Beträge $|h^2|$ gelten. Außerdem sind die oben genannten Funktionen — verständlicherweise — für einen allgemeinen Gebrauch der gewonnenen Ergebnisse noch nicht in ausreichendem Umfang zahlenmäßig bekannt[34]); sowohl $\xi = \xi_1$, wie auch $|h^2|$ schwanken in ziemlich weiten Grenzen, die letztere Größe deshalb, weil sie nach Gleichung (3, 12) nicht nur durch $\omega \varkappa \bar{\mu}$, sondern auch noch durch die absolute Größe von $a^2 - b^2$ beeinflußt wird.

---

34) Erwünschter noch als Tabellen, die wegen der zwei Variablen ξ und $|h^2|$ umständlich werden, wären vielleicht graphische Darstellungen. Bei Jahnke-Emde ist z. B. in Fig. 181, S. 295, die Funktion $ce_0(x, q) = u + iv$ für imaginäres q durch Kurven dargestellt.

Frankfurt a. M., Entwicklungsabteilung der Hartmann und Braun A.-G.

(Eingegangen 3. August 1941)

Das Eindringen einer Walze in eine ebene Unterlage

Von H. Hermann

1. Einleitung

Nach der Hertzschen Theorie ist für den Beginn des plastischen Nachgebens der Unterlage unter einer mit der Kraft p auf sie drückenden Walze maßgebend ein Grenzwert der Vertikalkomponente Z_z der elastischen Spannung in der Unterlage längs der als X-Achse verwendeten ersten Berührungsgeraden. Nennt man

$$p' = \frac{dp}{dx}$$

die Kraft je Längeneinheit der X-Achse, $1/\varrho_{11}$ den Halbmesser der Walze, ϑ_1 den bei stark ungleichem Material überwiegenden der beiden Kirchhoffschen Elastizitätskoeffizienten (das Drei- bis Vierfache der Kehrwerte der gewöhnlichen Elastizitätsmoduln), so ergibt die Theorie (s. Anhang)

$$Z_z = \sqrt{\frac{4p'\varrho_{11}}{\pi\vartheta_1}}, \tag{1}$$

so daß zu erwarten ist, daß bei wechselndem Walzenhalbmesser $p'\varrho_{11}$ konstant gefunden wird.

Nach der neuen, von Ludwig Föppl aus den Kugeldruckversuchen von Auerbach, A. Föppl und Schwerdt entwickelten Auffassung[1]) ist jedoch nicht die Spannung, sondern das Linienintegral der spezifischen elastischen Arbeit über die meistbeanspruchte Spannungslinie für das Nachgeben maßgebend oder, weil nach dem Hookeschen Gesetz die Verschiebung der Spannung proportional ist, das Produkt des Spannungsquadrats mit der Länge der Spannungslinie. Da beim ebenen Walzendruck die linearen Abmessungen des entstehenden Spannungsfeldes offenbar dem Walzenhalbmesser proportional sind, so ist die Folge dieser Auffassung nach Gleichung (1) die Erwartung, daß bei wechselndem Walzenhalbmesser der zu beginnendem Nachgeben erforderliche Wert p' konstant gefunden wird. Daß bei verschwindendem ϱ_{11} p' unendlich werden würde, zeigt nur, daß dieser Fall von Gleichung (1) nicht umfaßt wird. Bei der im Anhang gewählten Herleitung ergibt sich das, weil Gleichung (1) gebunden bleibt an die Voraussetzung, daß das dortige (Hertzsche) ϱ_{22} gegen ϱ_{11} zu vernachlässigen ist. Ein empirischer Übergang auf $\varrho_{11} = 0$ wird nachher angegeben.

1) L. Föppl, Der Spannungszustand und die Anstrengung der Werkstoffe bei Berührung zweier Körper. Forsch. Ing.wesen **7**, 220, 1936.

Ein strenger Zusammenhang zwischen Gleichung (1) und den im folgenden mitgeteilten Versuchen besteht nicht, da über das beginnende Nachgeben hinaus bis zur Trennung gegangen wird. Das Ergebnis liegt zwischen den beiden im elastischen Bereich gefolgerten Erwartungen, näher bei der Hertz entsprechenden.

Für sich ist es eine Antwort auf die technologische Frage nach den Kräften beim Eindringen einer Schneide und ihrem Zusammenhang mit der Gestalt der Schneide[2]).

2. Versuche

Mit Rücksicht auf die erreichbaren Hilfsmittel wurden die Versuche an Paraffin angestellt. Die Wahl dieses Materials war veranlaßt durch den Vorgang von A. Nadai[3]).

Die mechanischen Konstanten des Paraffins sind in den beiden physikalisch-chemischen Tabellenwerken nicht enthalten. Die elastischen findet man bei Auerbach[4]) ohne Quellenangabe; daher wurde der Elastizitätsmodul akustisch an einem mit der Hobelmaschine genau bearbeiteten Prisma nachgeprüft, wobei sich Auerbachs Ergebnis bestätigte; es beträgt 18000 kp (Kilopond, Bezeichnung der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt für das Kilogrammgewicht) je cm^2. Nachträglich wurden im Handbuch der Physik auch Schallgeschwindigkeitsmessungen für Paraffin gefunden. Das Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdehnung ist nach Auerbach 0,5, somit der Kirchhoffsche Koeffizient des Paraffins $\vartheta_1 = 1/6000$. ϑ_2 ist für Eisenwalzen 100mal kleiner; daher überwiegt ϑ_1. Das verwendete Paraffin hat den Schmelzpunkt 53°, ist also crude white der Handelsbezeichnungen der Int. Crit. Tables; seine Dichte bei der Versuchstemperatur von 17° ist 0,898 g/cm^3. Die Zerreißfestigkeit wurde zu 1,8 kp/cm^2, die rückwirkende Festigkeit eines Würfelchens zu 12,4 kp/cm^2 bestimmt.

Technologisch am meisten von Interesse wäre das Eindringen der Walze in der Nähe des Randes einer ausgedehnten Platte. Diese Versuchsweise würde die Abhängigkeit der zum

2) A. Voigt, Über die Druckverteilung im Eisen vor einer eindringenden Schneide. Verh. des Vereins z. Bef. d. Gewerbfleißes **86**, 536, 1907, enthält die Zusammenstellung der zahlreichen schon damals vorangegangenen Arbeiten über diese Frage.

3) Zeitschr. f. Physik **30**, 121, 1924. Nadai hat auch die mondsichelförmige Fließfigur an der Stirnfläche des Probekörpers beobachtet: Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **1**, 27, Abb. 22, 1921.

4) Physik in graphischen Darstellungen, Leipzig 1912, S. 22, Tafel 1, und S. 23, Tafel 5. Die Anführung aus dem Handbuch der Physik betrifft Bd. VIII, S. 646–647.

Spanabheben erforderlichen Kraft für ein schneidendes Werkzeug von der Krümmung der Schneide ergeben. Im Interesse der Versuchsausdehnung auf große Walzen wurde jedoch bei den Hauptversuchen ein Klotz von gleicher Breite wie der Walzendurchmesser gespalten (Fig. 1).

Die Kräfte wurden für die kleineren Walzendurchmesser mit zwei Hebelpressen erzeugt. Für die großen wurde eine hydraulische Vorlesungspresse verwandt. Ihre wirksame Übersetzung wurde durch einen Belastungsversuch bestimmt. Ein eiserner U-Balken von 2,3 m Länge wurde mit dem einen Ende auf Backsteine, mit dem anderen auf den Preßkolben gelagert und mit

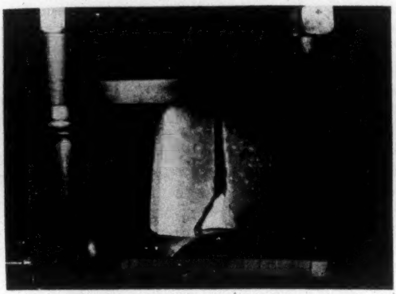

Fig. 1. Hydraulische Presse mit gespaltenem Paraffinklotz.

zwei passenden Eisenplatten belegt; auf diese wurden gleichförmig 27 Sack Zement gestapelt, so daß der Preßkolben die Hälfte der 1437 kp betragenden Last zu heben hatte. Die Presse war vollkommen öldicht, so daß der Beginn der Bewegung des Pumphebels scharf feststellbar war. Hierzu waren auf der Waagschale am Ende des Pumphebels 3,225 kp Übergewicht erforderlich. Die wirksame Übersetzung war somit 223:1. Nach den Abmessungen wäre sie 312:1.

An der Stirnfläche, an der übrigens die Spannungen andere Höchstwerte annehmen als im Innern[5]), tritt zuerst in der Mittelebene des Vorgangs ein schwacher Riß auf, der sich später wieder schließt; dann seitlich ein zweiter und dazu symmetrisch ein dritter, etwas divergent; weiter außen konvergent ein vierter und fünfter. Der vierte und fünfte Riß vereinigen sich zu einer Keilfläche; der Keil bleibt an der Walze haften. Unterhalb (in Fig. 1 oberhalb) des Keils

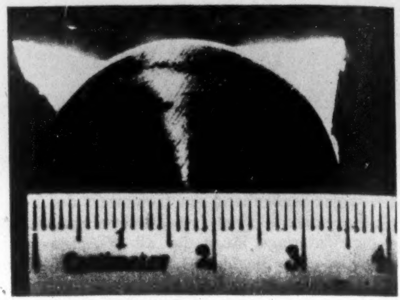

Fig. 2. Abhängigkeit des Keilwinkels vom Zeitmaß.

bildet sich in Fortsetzung des ersten Risses der Trennungsspalt[6]).

Das Zeitmaß des Vorgangs ist von Einfluß auf den Keilwinkel. In Fig. 2 ist der rechte Keil in einer Viertelstunde, der linke, schlankere in zwei Stunden zustandegekommen. Die Höchstwertflächen der Zugspannung liegen in den beiden Fällen so verschieden, daß die Zugspannung in diesem Gebiet ziemlich gleichförmig zu sein scheint. Das Material erscheint durch den Zug aufgelockert.

Bei sehr rascher Steigerung der Belastung führt schon der erste Riß zum Abspalten; bei

Abb. 3. Links: Spanabspalten durch Walzendruck. Walzenenden 13 mm. Rechts: Rißsystem.

---

5) Siehe z. B. A. Eichinger, Vortrag auf der Stuttgarter Tagung: Reibung und Verschleiß, S. 15 bis 28, VDI.-Verlag 1939.

6) Ähnliche, aber mikroskopische Rißbildungen in Eisen findet man dargestellt bei H. Diergarten an der Stelle der Note 5, S. 107, Bild 12; zu vergleichen mit Fig. 3.

Walzendurchmesser d .... cm	7,5	3,5	1,3	0,55	0,274	0,157	0,1
Vh. der berührten Walzenlänge zu d ...	1,2	1,1	1,7	2	4,6	11	23
$p'\varrho_{11} = 2p' : d$ .... kp/cm²	18	20	33	36	47	36	43

sehr langsamer (100 Stunden) findet ausgiebige plastische Verformung statt. Verwendet wurden Versuchsdauern von $^1/_2$–2 Stunden. Der letzte Versuch fand bei 19°, alle anderen bei 17° statt. Die obige Übersicht enthält für jede Walze das höchste vorgekommene Ergebnis.

Da nach Fig. 2 die Breite des rechten Keils mit dem Walzenhalbmesser übereinstimmt und beim linken, nach Fig. 4 zu schließen, die Druckfläche etwa doppelt so breit ist wie die Keilgrundfläche, somit die Breite der Druckfläche

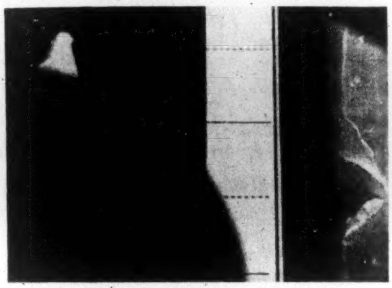

Fig. 4. Spaltversuch an breiterem Paraffinstück. (Der Viertelkreis ein Lampenschirm.)

dem Walzenhalbmesser ziemlich gleich bleibt, geht bei verschwindendem ϱ_{11} das Produkt $p'\varrho_{11}$ etwa in die rückwirkende Festigkeit über. Die Ergebnisse lassen sich daher etwa durch die Formel

$$\frac{p'}{r} = 12{,}4 + \frac{25{,}1}{0{,}75 + r}\,; \quad r = \frac{d}{2} = \frac{1}{\varrho_{11}} \qquad (2)$$

(p' in kp/cm, r in cm) darstellen.

Das bedeutet, daß die Schärfe einer Schneide etwas langsamer wächst als ihre Krümmung. Für scharf geschliffene Pendelschneiden ist nach Gebelein[7]) der Krümmungshalbmesser 10^{-4} cm; für solche ist nach Gleichung (2) zu erwarten, daß zum Eindringen in Paraffin etwa $4^1/_2$ Pond (Gramm Gewicht) je cm Schneide erforderlich sein mag. Versuche mit einer solchen auf einem mit Paraffin überzogenen, mit Mikrotom abgehobelten Objektträger ergaben etwas mehr, fast das Doppelte, für die zur Verletzung der Oberfläche durch eine Furche von etwa 1 Mikron Tiefe je cm Länge erforderliche Kraft.

7) Ing. Archiv **6**, 95, 1935.

3. Anhang: Herleitung der Gleichung (1)

Die Theorie des Walzendrucks auf eine ebene Unterlage läßt sich gewinnen als Sonderfall des Drucks gekreuzter Zylinder von ungleichen Halbmessern. Man bedarf zu diesem Zweck der Kenntnis der von Hertz (Werke, I, 174–182) nur angedeuteten Reduktion seiner Integrale. In seinen Bezeichnungen ist $1/\varrho_{22}$ der Halbmesser der zylindrischen Unterlage, in welche der schneidende Zylinder vom Halbmesser $1/\varrho_{11}$ eindringen soll, wie das Rasiermesser in ein Haar. Die dazu senkrechten Hauptkrümmungen ϱ_{12} und ϱ_{21} verschwinden; der Winkel ω zwischen den Ebenen der Krümmungen ϱ_{11} und ϱ_{21} ebenfalls; somit wird auch der Winkel ω' zwischen der Ebene der Krümmung ϱ_{11} und der XZ-Ebene Null, d. h. die XZ-Ebene enthält die Achse des zu schneidenden Zylinders. Die Koeffizienten des Abstandes

$$e = Ax^2 + By^2$$

werden

$$A = \varrho_{22}/2\,; \quad B = \varrho_{11}/2\,;$$

der Hilfswinkel τ ist bestimmt durch

$$\cos\tau = \frac{\varrho_{11} - \varrho_{22}}{\varrho_{11} + \varrho_{22}}\,; \quad \cos^2\frac{\tau}{2} = \frac{\varrho_{11}}{\varrho_{11} + \varrho_{22}}\,;$$

$$\sin^2\frac{\tau}{2} = \frac{\varrho_{22}}{\varrho_{11} + \varrho_{22}}\,;$$

die Halbachsen a und b der Druckellipse durch

$$a = \mu\sqrt[3]{\frac{3p\vartheta_1}{8(\varrho_{11} + \varrho_{22})}}\,;$$

$$b = \nu\sqrt[3]{\frac{3p\vartheta_1}{8(\varrho_{11} + \varrho_{22})}}\,; \quad \frac{b}{a} = k\,;$$

μ und ν sind Abkürzungen für Kubikwurzeln elliptischer Integrale in den Gleichungen

$$J_2 = \frac{\pi}{2}\mu^3\sin^2\frac{\tau}{2} = \int_0^\infty \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 + k^2\zeta^2)^3(1 + \zeta^2)}}\,,$$

$$J_3 = \frac{\pi}{2}\nu^3\cos^2\frac{\tau}{2} = \int_0^\infty \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 + \zeta^2/k^2)^3(1 + \zeta^2)}}\,.$$

Die Zurückführung auf bekannte Formen mittels

$$\zeta = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ für } J_2\,; \quad \zeta = \frac{kx}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ für } J_3$$

ergibt mit $\varkappa^2 = 1 - k^2$

$$J_2 = K(\varkappa) - \frac{k^2}{\varkappa}\frac{dK}{d\varkappa} \qquad J_3 = kK + \frac{k}{\varkappa}\frac{dE}{d\varkappa}$$

oder auch (bei J_2 unmittelbar aus $\zeta = \frac{1}{k}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ nach freundlicher Bemerkung des Herrn Professors Dr. Grammel)

$$J_2 = \frac{1}{\varkappa^2}(K - E) \qquad J_3 = \frac{kE}{\varkappa^2} - \frac{k^3}{\varkappa^2}K,$$

wo $K(\varkappa)$ und $E(\varkappa)$ die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, bei Legendre $F_1(c)$ und $E_1(c)$, bedeuten; k entspricht dem Legendreschen b.

Ist dieses klein, $\varkappa$ nahezu 1, so ist näherungsweise[8])

$$K \approx \ln\frac{4}{k} + \frac{k^2}{4}\left(\ln\frac{4}{k} - 1\right);$$

$$E \approx 1 + \frac{k^2}{2}\left(\ln\frac{4}{k} - \frac{1}{2}\right);$$

$$\frac{k^2}{\varkappa}\frac{dK}{d\varkappa} \approx 1 - \frac{k^2}{2}\left(\ln\frac{4}{k} - \frac{3}{2}\right) \approx 1;$$

$$\frac{k}{\varkappa}\frac{dE}{d\varkappa} \approx k\left(1 - \ln\frac{4}{k}\right).$$

Mit der weitergehenden der beiden Vereinfachungen wird alsdann

$$J_2 \approx \ln\frac{4}{k} - 1 \qquad J_3 \approx k.$$

Beispiel

Für $\tau = 10°$ wird

$$\varrho_{11}/\varrho_{22} = \operatorname{ctg}^2 5° = 130{,}65.$$

Die Hertzsche tabulierte Durchführung der strengen Rechnung liefert dazu

$$k = \nu/\mu = 0{,}04825 = 1/20{,}727; \quad \varkappa = 0{,}9989.$$

Die entwickelte Näherung liefert von diesem k-Wert aus

$$\varrho_{11}/\varrho_{22} = \frac{J_3\mu^3}{J_2\nu^3} \approx \frac{1}{k^2\left(\ln\frac{4}{k} - 1\right)} = \frac{430}{3{,}42} = 125. \quad (3)$$

Anwendung auf die Vertikalspannung in der Mitte der Druckfläche

Mit dieser Vereinfachung wird der Ausdruck für die senkrechte Spannung in der Geraden $x = y = 0$ unter Vernachlässigung von ϱ_{22} neben ϱ_{11}

$$Z_z = \frac{3p}{2\pi a b} = \sqrt[3]{\frac{6p\varrho_{11}\varrho_{22}}{\pi k\left(\ln\frac{4}{k} - 1\right)\vartheta_1^2}}.$$

Die große Halbachse der Druckellipse wird

$$a = \sqrt[3]{\frac{3p\vartheta_1}{4\pi\varrho_{22}}\left(\ln\frac{4}{k} - 1\right)},$$

daher

$$\frac{p}{a} = \sqrt[3]{\frac{4\pi p^2\varrho_{22}}{3\vartheta_1\left(\ln\frac{4}{k} - 1\right)}}.$$

Beobachtet wird

$$p' = \frac{dp}{dx_{x=0}} = \int_{-b}^{b} Z_{z_{x=0}}\,dy$$

$$= \frac{3p}{2\pi a b}\int_{-b}^{b}\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\,dy = \frac{3p}{4a}.$$

Hiernach wird wegen Gleichung (3)

$$Z_z^2 a = \frac{3p\varrho_{11}}{\pi\vartheta_1}; \qquad Z_z = \sqrt{\frac{4p'\varrho_{11}}{\pi\vartheta_1}} \quad (1)$$

und als L. Föpplsches Anstrengungsmaß erhält man

$$\frac{Z_z^2}{\varrho_{11}} = \frac{4p'}{\pi\vartheta_1}.$$

4. Zusammenfassung

Paraffinklötze wurden durch Walzen verschiedenen Durchmessers gespalten, die Rißbildung beobachtet und die je Zentimeter Walzenlänge und Walzenhalbmesser erforderliche Kraft gemessen. Ihr Betrag steigt von dem Betrag der rückwirkenden Festigkeit her bei abnehmendem Walzenhalbmesser langsam an. Ein loser Vergleich mit den für das erste plastische Nachgeben nach Hertz und Föppl zu gewinnenden Erwartungen ist angestellt. Der Anhang enthält eine Herleitung, welche den Übergang von zwei gekreuzten Zylindern ungleicher Krümmung auf Zylinder und Ebene benutzt, um eine beim weiteren Übergang auf zwei Ebenen sonst auftretende Schwierigkeit zu umgehen.

Für die Ermöglichung der Versuche ist Verfasser sowohl Herrn Professor Dr. Back in Tübingen als auch den Firmen J. Eberspächer in Eßlingen und Pflumm & Kemmler in Tübingen zu Dank verpflichtet.

Tübingen, Keplerstr. 5.

(Eingegangen 15. Juni 1941)

8) Legendre, Ex. du calcul, Bd. 1, S. 68, 1811; Jahnke-Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, 3. Aufl., S. 73, 1938.

Ein erprobter Druckzähler

Von Werner Kolhörster und Karl Lange

Mitteilung aus dem Institut für Höhenstrahlenforschung der Universität Berlin

Zur Aufzeichnung von Impulsen, insbesondere von einzelnen und koinzidierenden Stößen bei Zählrohren sind im hiesigen Institut Druckzähler entwickelt worden, die sich bereits seit einigen Jahren im Dauerbetrieb gut bewährt haben. Bei diesen Zählern erfolgt die Summation der Stöße durch ein Rollenzählwerk mit erhabenen Ziffern, dessen Zahlenstand nach Ablauf der Beobachtungszeit elektromagnetisch oder von Hand auf den Registrierstreifen gedruckt wird. Sie bestehen also aus einer Verbindung eines Zählwerks mit einem Druck- und Förderwerk. Die mechanische Registrierung hat mancherlei Vorteile gegenüber photographischen Registrierungen aufzuweisen:

1. Man kann sogleich jedes einzelne Ergebnis ablesen, ohne erst auf die Entwicklung des Films warten zu müssen.
2. Die offene Apparatur bietet leichtere Kontrollmöglichkeiten als eine lichtdicht verschlossene Anordnung.
3. Sie bedarf nur sehr geringer Wartung und ist
4. durch Verwendung von Rekorder- bzw. Telegraphenpapier außerordentlich billig gegenüber Filmen.

Man kann Druckwerke entweder als gewöhnliche Relais- oder als getriebene Zählwerke ausbilden. Als Beispiel für erstere gilt der Telefongesprächszähler, für letztere der Uhrenzähler, bei dem der Anker durch den Elektromagnetstoß ausgelöst wird. Relaiszähler sind also einfacher als getriebene. Letztere haben aber den Vorteil, daß sie schneller und sicherer arbeiten und die Verwendung von Stoßstangen, welche das Material sehr beanspruchen sowie eine Mehrzahl von Lagern erfordern, vermeiden. Bei getriebenen Zählwerken besteht dagegen das maßgeblich beanspruchte Lager nur aus den zwei Zapfen, die Anker und Hemmung auf gemeinsamer Achse tragen.

Für die im folgenden beschriebene Bauart kam nun als besonderer Gesichtspunkt zur Geltung, daß sie möglichst zuverlässig auch im jahrelangen Dauerbetrieb zu arbeiten vermag. Hierzu ist bei dem harten Betriebe eine sehr viel höhere Sicherheit bei der Bemessung der Einzelteile als unter gewöhnlichen Verhältnissen erforderlich. Sie ließ sich unbedenklich ausführen, weil ein besonderes gutes Auflösungsvermögen nicht verlangt zu werden brauchte. So konnte bei einem für mechanische Zählwerke durchaus naturgemäßen Auflösungsvermögen von etwa 10^{-2} sec geblieben werden, das ohne weiteres erreichbar ist, während eine Verbesserung des Auflösungsvermögens um etwa eine Zehnerpotenz schon sehr viele künstliche Eingriffe erfordert haben würde, die den Dauerbetrieb wahrscheinlich nicht ohne weiteres durchhalten.

Diese Beschränkung auf ein ziemlich mäßiges Auflösungsvermögen wird durch die heute verfügbaren elektrischen Untersetzer hoher Leistungsfähigkeit ermöglicht. Durch sie kann die Stoßzahl bereits so weitgehend herabgesetzt werden, daß das Zählwerk auch bei schnellen Stoßfolgen, die durch den Untersetzer verlangsamt und ausgeglichen werden, einwandfrei zu zählen in der Lage ist. Allerdings darf man sich nicht mit den üblichen Thyratronuntersetzern z. B. nach Wynn-Williams[1]) begnügen, deren Auflösungsvermögen nur etwa 10^{-3} sec, also eine Zehnerpotenz besser als das der Druckwerke ist. Man muß vielmehr Untersetzer mit Hochvakuumröhren benutzen, z. B. in der Ausführung, wie sie von Forsman[2]) angegeben wurde, deren Auflösungsvermögen bereits auf 10^{-5} sec herabgedrückt ist. Der Untersetzer zählt also die hohen Frequenzen, die dem Zählwerk selbst entgehen würden; dabei hat sich herausgestellt, daß eine Untersetzung im Verhältnis von 8 : 1 vollauf genügt, um das Druckwerk für die bei der Höhenstrahlung auftretenden Frequenzen sicher auszusteuern.

Es kam also darauf hinaus, ein sehr sicher arbeitendes Antriebswerk mit einem Druckwerk zu verbinden, dessen Zahlenstand in vorgegebener Zeit elektromagnetisch gedruckt wird. Als Antrieb für das Druckzählwerk fanden nach einfachem Umbau Zählwerke für Augenablesung Verwendung, die von der AEG. handelsmäßig bezogen werden konnten. Sie enthalten ein Steigrad mit ziemlich grober Ankerhemmung, die elektromagnetisch betätigt wird. Das Steigrad selbst wird direkt von einer schwachen Feder getrieben, die ihrerseits durch einen Schlupfmotor ständig auf gleicher Spannung gehalten wird. An Stelle der Zeigerablesung wurde ein aus 4 Rollen mit Druckzahlen bestehender Rollenzähler angesetzt, der vom Zählwerk getrieben, in seinen einzelnen Schritten durch die Impulse des Elektromagneten gesteuert wird.

Der jeweilige Zahlenstand kann in den gewünschten Zeitabständen, im vorliegenden Fall halbstündlich, zum Abdruck gebracht werden. In der Figur 1 ist die Außenansicht des Druckzählers bei abgenommenem Schutzgehäuse

1) C. E. Wynn-Williams, Proc. Roy. Soc. (A) **136**, 312, 1932.
2) K. E. Forsman, Phys. Zeitschr. **39**, 410, 1938.

wiedergegeben, die Einzelteile, wie Zählwerk, Druckwerk und Förderwerk, sind in Figuren 2, 3 und 4 abgebildet. Wie man sieht, wird der Morsetelegraphenstreifen zwischen Druckhammer und Rollenzählwerk gemeinsam

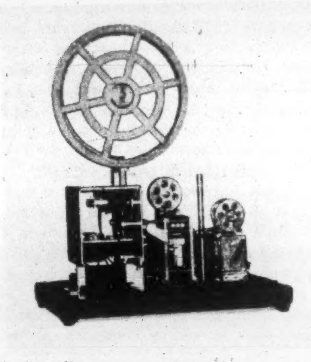

Fig. 1. Druckzähler, Schutzgehäuse abgenommen.

mit dem Farbband durchgezogen. Das durch einen Synchronmotor getriebene Förderwerk besitzt die Friktionswalzen, die den Papierstreifen erfassen und die durch Zahnräder

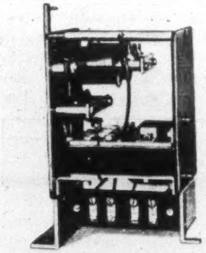

Fig. 2. Zählwerk.

gekuppelte Farbbandspule. Der Synchronmotor, ebenso der Druckmagnet und der Kurzschlußläufermotor des getriebenen Zählwerkes sind für direkten Netzanschluß vorgesehen. Die Übertragung durch die Friktionsrollen ist so, daß in einer halben Stunde der Streifen um die Druckbreite und Zwischenraum vorgeschoben wird. Der Streifen läuft also kontinuierlich weiter. Durch eine Taste, welche die Friktionswalze abhebt, läßt sich der Papierstreifen auch während des Betriebes nach Belieben vorziehen, um sogleich nach dem Druck das Ergebnis abzulesen. Die Fördergeschwindigkeit kann durch Zwischenvorgelege bzw. Änderung des Förderwalzendurchmessers je nach Anzahl der gewünschten Drucke pro Zeiteinheit geändert werden, bis zur

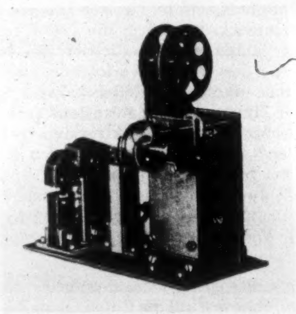

Fig. 3. Druckwerk.

Erhöhung der Fördergeschwindigkeit auf etwa das 60fache. Gegenüber dem kontinuierlichen Ablauf läßt sich durch Einbau eines Steuermotors, wie er hier für andere Registrierapparate entwickelt wurde, die Vorschublänge nach Bedarf regeln, ebenso wie die Anzahl der Vorschübe je Zeiteinheit durch einfaches Auswechseln von

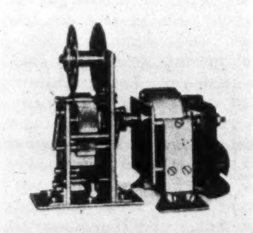

Fig. 4. Förderwerk.

Fallenwalzen. Dann also erfolgt der Papier- und Farbbandvorschub schrittweise, jeweils kurz nach dem Druckschlag.

Der Druckvorgang selbst wird durch einen Elektromagneten ausgeführt, indem der Hammer die Zahlenstellung abdruckt. Da der Druckschlag nur Bruchteile einer Sekunde beträgt, ist eine Unterbrechung der Registrierung durch Abschalten des Zählwerkes nicht nötig. Die Kon-

struktion ist so gehalten, daß durch etwa einfallende Stöße während des Druckprozesses eine Vorspannung des Rollenzählers möglich wird, die nach Freigabe sofort den richtigen Stand der Rollen gewährleistet. Hierdurch werden übliche Schaltrelais und deren Störungsmöglichkeiten vermieden, was den Betrieb wesentlich vereinfacht und eine wirkliche Sicherheit erst gewährleistet.

Das Druckzählwerk besitzt keine besondere Schaltuhr zur Betätigung des Elektromagneten. Es kann von Hand aus durch Niederdrücken des Hammers ohne weiteres betrieben werden. Soll dies durch den Elektromagneten geschehen, so liefert eine Schaltuhr den Stromstoß. Diese kann, wie hier im Institut, eine größere Anzahl von Druckwerken gemeinsam steuern, so daß nur eine einzige Schaltuhr für alle Druckzähler erforderlich wird. Die Uhr ist aus einer normalen Tischuhr mit Schlagwerk der Firma Junghans hergestellt, aus der Federhaus und Hemmung für das Gangwerk herausgenommen und durch einen Synchronmotor ersetzt wurden. Das Schlagwerk wird also zur Kontaktgebung verwendet. Die Uhr schaltet nun nicht durch direkten Kontakt, sondern betätigt einen Cutaxschalter der AEG., der in der Lage ist, auch bis zu großen Intensitäten zu schalten. Durch Verwendung mehrerer solcher Schaltschützen wäre die Uhr sogar zur Abschaltung von sehr großen Leistungen befähigt. In der Fig. 5 ist eine Abbildung der Schaltuhr gegeben.

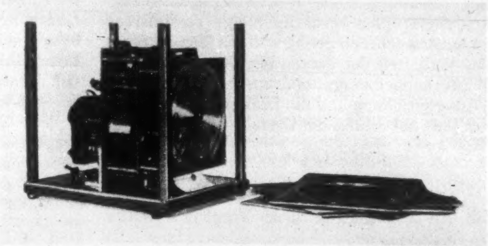

Fig. 5. Schaltuhr, einsteckbare Seitenwände sowie Deckel abgenommen.

Instrumente der hier beschriebenen Art sind seit etwa drei Jahren ununterbrochen im Betrieb. Die Druckzähler haben währenddessen ohne wesentliche Überholung etwa 50 Millionen Stöße gezählt, und das Uhrwerk läuft bisher drei Jahre völlig störungsfrei, so daß durch diese Anordnung eine absolute Sicherheit der Zählung im dauernden Betrieb gewährleistet ist. Alle erforderlichen mechanischen Arbeiten wurden in der Institutswerkstatt ausgeführt. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft sowie dem Stifterverband verdanken wir die Mittel zur Ausführung der Apparaturen.

Berlin-Dahlem, den 8. August 1941.

(Eingegangen 8. August 1941)

Bestimmung der Luftfeuchtigkeit mit Hilfe der Verdunstungstemperatur von Wasser

Von Klaus Oswatitsch

Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung

Arbeiten über Kondensationserscheinungen in strömender Luft warfen bei uns die Frage nach der Temperatur von verdunstendem oder kondensierendem Wasser auf. Es zeigt sich, daß die Verdunstungstemperatur von Wasser, welches sich in ruhender Luft befindet, weitgehend mit der Temperatur des feuchten Thermometers eines Aßmannschen Aspirations-Psychrometers übereinstimmt. Diese starke Temperaturabkühlung von Wasser in ungesättigter Luft gibt uns die Möglichkeit, die Luftfeuchtigkeit auch dann mit der Genauigkeit eines Aßmannschen Aspirations-Psychrometers zu bestimmen, wenn uns nur etwa ein dm³ Luft zur Verfügung steht. Die Genauigkeit der Methode dürfte sich durch Verwendung genauerer Thermometer (etwa des Beckmannschen Thermometers) noch steigern lassen.

Denken wir uns einen beliebig geformten Wassertropfen frei schwebend in ruhender Luft. Diese habe in weiter Entfernung vom Tropfen die absolute Temperatur T_∞ und den Wasserdampfdruck $p_{D\infty}$. Die entsprechenden Zustandsgrößen an der Tropfenoberfläche seien T_0 und p_{D0}. Bei genügend großen Tropfen mit einem Durchmesser von über 1 mm können wir im allgemeinen annehmen, daß an der Tropfenoberfläche weder ein Drucksprung noch ein Temperatursprung vorhanden ist[1]) und p_{D0} der zu T_0

1) Kl. Oswatitsch, Die Dispersion und Absorption des Schalles in Wolken. Physik. Zeitschr. **42**, 1941 (im Druck).

T_0	$D \cdot \frac{p}{760} \left(\frac{cm^2}{sec}\right)$	$r \left(\frac{cal}{g}\right)$	$k \cdot 10^4 \left(\frac{cal}{^0C \cdot cm \cdot sec}\right)$	$\alpha \frac{760}{p} \left(\frac{mm\ Hg}{^0C}\right)$
273	0,209	597	0,578	0,436
283	0,223	592	0,594	0,439
293	0,238	586	0,611	0,443

gehörige Sättigungsdruck ist, den wir mit $e(T_0)$ bezeichnen wollen. Die Wanderungsgeschwindigkeit der Tropfenoberfläche infolge Verdunstung ist außerordentlich gering und wir können daher das Verhalten der Zustandsgrößen in Luft und Wasser einfach als stationär ansehen. Die Wärmeleitungsgleichung und die Diffusionsgleichung in der Luft haben also die Gestalt

$$\Delta p_D = 0$$
$$\Delta T = 0,$$

mit den Bedingungen an der Tropfenoberfläche

$$T = T_0 \qquad p_D = p_{D0} = e(T_0)$$

und in weiter Entfernung vom Tropfen

$$T = T_\infty \qquad p_D = p_{D\infty} \,.$$

Nennen wir die nach außen gerichtete Normale auf der Tropfenoberfläche n, so hat der Temperatur- und der Dampfdruckgradient an der Tropfenoberfläche folgende Gestalt

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_0 = A\,(T_\infty - T_0)\,, \quad \left(\frac{\partial p_D}{\partial n}\right)_0 = A\,(p_{D\infty} - p_0)\,,$$

wobei A lediglich von der betrachteten Stelle der Tropfenoberfläche abhängt, wegen der Gleichheit der Randbedingungen und der Differentialgleichungen für Temperatur und Druck aber gleich ist.

Im stationären Fall, bei dem sich eine konstante Tropfentemperatur eingestellt hat, muß nun die bei der Verdunstung an der Tropfenoberfläche gebundene Wärme gerade gleich der durch Wärmeleitung von außen zugeführten Wärme sein. Bezeichnen wir mit R die absolute Gaskonstante, mit m_D das Molekulargewicht des Wasserdampfes und mit D die Diffusionskonstante, so ist die von der Tropfenoberflächeneinheit in der Zeiteinheit abgeführte Masse gleich

$$D\,\frac{m_D}{R T_0}\left(\frac{\partial p_D}{\partial n}\right)_0 .$$

Ist ferner die Verdampfungswärme des Wassers gleich r und das Wärmeleitvermögen der Luft gleich k, so muß im stationären Fall folgende Gleichung bestehen

$$r D\,\frac{m_D}{R T_0}\,A(p_{D\infty} - p_{D0}) = -\,kA\,(T_\infty - T_0)\,. \quad (1)$$

Nachdem p_{D0} der Sättigungsdruck von T_0 ist, so ist T_0 bei bekanntem $p_{D\infty}$ und T_∞ durch diese Gleichung bestimmt. T_0 ist, wie man sieht, unabhängig von Tropfengröße und Tropfengestalt. Lediglich die Zeit, welche benötigt wird, damit sich der stationäre Zustand einstellt, ist natürlich um so kürzer, je kleiner der Tropfen ist.

Wie Gleichung (1) zeigt, kommt es bei der Frage nach der Verdunstungstemperatur von Wasser nur auf ein Verhältnis von physikalischen Größen an, für welches wir den Buchstaben α einführen wollen

$$\alpha = \frac{k}{rD}\cdot\frac{RT_0}{m_D}\,. \quad (2)$$

Wir legen für die Berechnung von α die Gleichung von Mache (1910) für die Diffusionskonstante zugrunde

$$D = 0{,}209\left(\frac{T}{273}\right)^{1{,}86}\frac{760}{p}\,.$$

p ist dabei der in mm Hg gemessene Luftdruck.

Nachdem alle übrigen Größen in Gleichung (2) lediglich von der Temperatur abhängen, ist α also dem Luftdruck proportional. Nehmen wir für Diffusionskonstante und Wärmeleitfähigkeit stets die an der Tropfenoberfläche geltenden Werte, so erhalten wir obenstehende Zusammenstellung.

Wir sehen, daß die Konstante α die angenehme Eigenschaft hat, nur in sehr geringem Maß von der Temperatur abzuhängen. Immerhin kann die Temperaturabhängigkeit nicht unbeachtet bleiben. Wichtiger ist aber die Beachtung der Druckabhängigkeit von α.

Wir führen nun in der Gleichung (1) den zur Temperatur T_∞ gehörigen Sättigungsdruck $e(T_\infty)$ ein und erhalten:

$$p_{D\infty} - e(T_\infty) = e(T_0) - e(T_\infty) - \alpha(T_\infty - T_0)\,.$$

Nehmen wir anstatt der absoluten Temperatur T die Temperatur in °C t und bedenken wir, daß die relative Feuchtigkeit φ nichts anderes ist als das Verhältnis von Dampfdruck und Sättigungsdruck des Wasserdampfes in der Luft in weiter Entfernung vom Tropfen, so bekommen wir die Gleichung

$$\varphi = \frac{p_{D\infty}}{e(t_\infty)} = 1 - \frac{e(t_\infty) - e(t_0) + \alpha(t_\infty - t_0)}{e(t_\infty)}\,. \quad (3)$$

t_∞ ist dabei nichts anderes als die Lufttemperatur entsprechend der Temperatur des trockenen

Thermometers und t_0' die Tropfentemperatur entsprechend der Temperatur des feuchten Thermometers eines Psychrometers. Für die Anwendung der Gleichung (3) benötigt man bei bekanntem α lediglich eine Tabelle über den Sättigungsdruck des Wasserdampfes in Abhängigkeit von der Temperatur.

Bedenken wir, daß α dem Luftdruck proportional ist, so sehen wir, daß Gleichung (3) dieselbe Gestalt wie die aus meteorologischen Erfahrungen gewonnenen Psychrometergleichungen hat (siehe etwa: Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik). Dies ist nicht weiter verwunderlich. Bei den üblichen Psychrometern kommt nämlich außer der Wärmezufuhr durch die Luft auch noch die Wärmezufuhr durch das Thermometerglas in Betracht. Bei stärkerem Wind steigt nun die Diffusion und die Wärmezufuhr durch die Luft beinahe gleich an, weil das Temperaturleitvermögen der Luft und die Diffusionskonstante von Wasserdampf in Luft numerisch fast gleich sind. Die Wärmezufuhr durch das Glas tritt dagegen in den Hintergrund. So ein angeblasenes Psychrometer verhält sich also sehr ähnlich wie ein frei schwebender Wassertropfen.

Berechnen wir mit Hilfe von Gleichung (3) aus der relativen Feuchtigkeit und der Lufttemperatur die Tropfentemperatur, so sehen wir, daß wir es etwa mit dem gleichen Temperaturunterschied zu tun haben, den man auch beim Aßmannschen Aspirations-Psychrometer beobachtet. Der Grund, warum man mit einem Psychrometer, welches sich in vollkommen ruhender Luft befindet, nicht entsprechende Temperaturdifferenzen erreicht, scheint also in einer zusätzlichen Wärmezufuhr durch das Quecksilberthermometer zu liegen.

Wollen wir nun die Luftfeuchtigkeit mit Hilfe der Verdunstungstemperatur von Wasser bestimmen, so müssen wir vor allem sehen, wie wir die Temperaturerniedrigung des Wassers messen können ohne sie zu stark durch Wärmezufuhr zu beeinflussen. Denken wir uns einen kugelförmigen Tropfen mit einem Radius von $\xi = 1$ mm an einem Kupfer-Konstantan-Element aufgehängt. Die Wärmezufuhr durch die Drähte soll klein gegenüber der Wärmezufuhr durch die Luft sein. Diese berechnet sich zu

$$4\pi\xi^2\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_0 k = 4\pi\xi k(T_\infty - T_0)\,.$$

Für eine störende Wärmezuleitung kommt vor allem der Kupferdraht in Frage, da das Wärmeleitvermögen des Kupfers rund 17mal so groß ist als dasjenige von Konstantan. Denken wir uns den Kupferdraht ebenfalls von einem feuchten Faden umgeben oder wärmeisoliert, so kommt also nur Wärmezuleitung durch den Draht selbst in Frage. Die Wärmeisolierung des Kupferdrahtes dürfte dabei im allgemeinen schon durch die gewöhnliche elektrische Isolierung erreicht werden. Der Kupferdraht habe in einer Ausdehnung von der Länge l einen Durchmesser von der Größe σ. Im Abstand l vom Thermoelement sei er an einen stärkeren Kupferdraht angelötet, welcher die Temperatur T_∞ habe. Die zugeführte Wärmemenge in der Zeiteinheit ist dann

$$\frac{\pi\sigma^2}{4}\frac{T_\infty - T_0}{l}k_k\,,$$

wobei k_k das Wärmeleitvermögen des Kupfers ist. Dieser Wärmestrom muß klein sein gegenüber der Wärmezufuhr durch die Luft, also:

$$\frac{\sigma^2}{16\xi l}\frac{k_k}{k} \ll 1\,.$$

Das Wärmeleitvermögen von Kupfer verhält sich zu dem der Luft wie 15000 : 1. Wählen wir also $l = 5$ cm und $\sigma = 0{,}002$ cm, mit einem Draht von diesem Durchmesser läßt sich ein Thermoelement bei einiger Übung noch recht gut herstellen, so ist bei $\xi = 0{,}1$ cm

$$\frac{\sigma^2}{16\xi l}\cdot\frac{k_k}{k} \doteq 0{,}0075\,.$$

Bei diesen Verhältnissen wäre also das Wärmeleitvermögen der Luft um 0,75 Proz. zu korrigieren, eine Größe, die im allgemeinen nicht ins Gewicht fällt und außerdem, etwa durch Wahl eines anderen Thermoelementes, noch herabgedrückt werden könnte.

Als Nächstes wollen wir den Einfluß von Wind auf die Tropfentemperatur untersuchen. Dieser Einfluß ist dann bedeutungslos, wenn die Reynoldssche Zahl, gebildet mit der Windgeschwindigkeit, dem Tropfenradius und der kinematischen Zähigkeit der Luft ν, kleiner als 1 ist

$$\frac{\xi w}{\nu} < 1\,.$$

Bei einem Tropfenradius von $\xi = 0{,}1$ cm darf also, da ν ungefähr 0,14 cm²/sec ist, die Windgeschwindigkeit nicht größer als etwa $w = 1$ cm/sec sein, damit diese Bedingung erfüllt ist. Dies läßt sich im allgemeinen aber leicht erreichen.

Die Einstellzeit der Verdunstungstemperatur eines Tropfens ist dem Quadrat des Tropfenradius proportional. Ein Tropfen von 1 mm Radius hat sich eine halbe Minute nachdem man den Tropfen an den gewünschten Ort gebracht hat oder nachdem man den Tropfen erneuert hat, auf die stationäre Verdunstungstemperatur eingestellt. Wenn es gelingt, ein entsprechend kleines Thermoelement herzustellen, so kann

man mit einem noch viel kleineren Tropfen arbeiten, um die Einstellzeit herabzudrücken, da die Zeit, die benötigt wird, damit der Tropfen vollkommen verdunstet, wie aus einem unten mitgeteilten Versuch hervorgeht, recht lang ist.

Zur Prüfung dieser theoretischen Erwägungen führten wir zunächst einige Versuche durch. Zur Verwendung kam ein Thermoelement, von dessen Lötstelle ein isolierter Kupferdraht mit einem Durchmesser von 0,002 cm und ein isolierter Konstantandraht mit einem Durchmesser von 0,003 cm wegführte. In 5 cm Entfernung von der Lötstelle waren die Drähte an stärkere Drähte desselben Metalls angelötet. Für die Messung des Thermostromes wurde ein Spiegelgalvanometer verwendet. Das Thermoelement wurde in üblicher Weise geeicht. Damit sich an der Lötstelle ein Wassertropfen hält, wurde diese mit einem dünnen gereinigten Faden umgeben. Bei einigen Messungen wurden die dünnen Drähte in ihrer ganzen Länge mit nassen Fäden umwickelt. Die Resultate wurden dadurch aber nicht beeinflußt, ein Zeichen, daß die elektrische aus Lack bestehende Isolierung der dünnen Drähte bereits für ihre Wärmeisolierung ausreichte. Unabhängig davon, ob das Thermoelement mit destilliertem Wasser oder mit Wasserleitungswasser benetzt wurde, war die mit Hilfe des Thermoelements auf Grund von Gleichung (3) ermittelte relative Feuchtigkeit stets um etwa 2 Proz. höher als die mit einem Aßmannschen Aspirations-Psychrometer gemessene relative Feuchtigkeit. Das Aspirations-Psychrometer war mit einem geeichten Instrument verglichen. Für die Temperatur t_∞ wurde die Anzeige des trockenen Thermometers des Psychrometers zugrundegelegt. Bei einigen Messungen kam auch ein strahlungsgeschütztes Thermoelement für die Messung dieser Temperatur in Anwendung. Es ergaben sich dadurch aber keine anderen Resultate. Für genügende Durchmischung der Luft war gesorgt, da sonst Abweichungen leicht dadurch entstehen können, daß man mit Hilfe des Thermoelementes die Luftfeuchtigkeit eines sehr kleinen Raumes, mit dem Psychrometer aber die mittlere Feuchtigkeit eines bedeutend größeren Luftvolumens mißt. Bezeichnen wir die mit dem feuchten Psychrometer-Thermometer gemessene Temperatur mit t' und die dazugehörige relative Feuchtigkeit mit φ', so ergaben sich etwa folgende Resultate:

t	t_0	t'	φ	φ'
22,9	17,6	17,5	0,607	0,59
22,9	17,5	17,5	0,604	0,59
23,2	17,8	17,6	0,606	0,58
23,2	17,7	17,6	0,600	0,58

Der Wert von φ ist dabei aus den Temperaturen t und t_0 mit Hilfe von Gleichung (3) gewonnen, wobei $\alpha = 0{,}435 \frac{\text{mm } Hg}{{}^\circ\text{C}}$ gesetzt wurde, den Wert φ' findet man bei bekanntem t und t' in den Psychrometertabellen. Der Grund der systematischen Abweichungen konnte nicht aufgeklärt werden. Sie dürften vielleicht mit noch nicht geklärten Verhältnissen an der Flüssigkeitsoberfläche zusammenhängen[2]).

Wenn man also die Luftfeuchtigkeit mit der hier beschriebenen Methode genau bestimmen will, so muß man eine Eichung des Feuchtigkeitsmessers vornehmen. Woher die Diskrepanz von Versuch und Theorie auch kommen mag, in jedem Fall wird man den von unserer Theorie gemachten kleinen Fehler proportional der Dampfdruckdifferenz $p_{D\infty} - p_{D0}$ oder der Temperaturdifferenz $T_\infty - T_0$ zu setzen haben. Das heißt aber, wie Gleichung (1) und (2) zeigt, daß der Wert von α etwas zu korrigieren ist. Es ist bei irgendeiner bekannten Luftfeuchtigkeit der Wert von α zu bestimmen, ist dieser bekannt, so können wir jede beliebige Luftfeuchtigkeit in einem gewissen Temperaturbereich mit unserem Thermoelement messen. Wir erhalten dabei um so genauere Werte von α, je größer die Trockenheit ist, bei der wir die Eichung vornehmen. Um nicht darauf angewiesen zu sein, für die Eichung noch eine andere Luftfeuchtigkeitsbestimmung heranzuziehen, ist es daher wohl am besten, diese bei trockener Luft vorzunehmen.

Wir führten in unserem Institut die Eichung nun so durch, daß wir die Vorrichtung, welche das Thermoelement trug, in einen mit Chlorkalzium gefüllten Exsikkator brachten. Am Thermoelement wurde dabei ein möglichst großer Tropfen angebracht. Das Chlorkalzium wurde mit Hilfe eines Drahtnetzes in einer Entfernung von ungefähr zehnfachem Tropfenradius vom Tropfen abgehalten. In etwa der gleichen Entfernung wurde mit Hilfe eines Quecksilberthermometers die Temperatur gemessen. Die Durchführung des Thermometers und der Thermodrähte durch den Exsikkatordeckel war sorgfältig abgedichtet. Auch war dafür gesorgt, daß der durch das Drahtnetz gebildete Raum, in welchen das Thermoelement bei der Eichung hineingehängt wurde, beim Öffnen des Exsikkatordeckels von der feuchten Außenluft möglichst unberührt blieb. Gleichzeitig wurde darauf geachtet, daß beim Einbringen des Thermoelements die Lufttemperatur möglichst ungeändert blieb, da ja sonst Temperaturunter-

2) N. Gudris und L. Kulikowa, Die Verdampfung kleiner Wassertropfen. Zeitschr. f. Phys. **25**, 121, 1924.

schiede zwischen Thermoelement und Quecksilberthermometer nicht nur durch das Verdunsten von Wasser, sondern auch durch die Anwesenheit verschieden warmer Luft zustandekommt. Für die Ausschaltung eines solchen Fehlers dürfte das Konstantbleiben der mit dem Quecksilberthermometer angezeigten Temperatur ein ausreichender Fingerzeig sein.

Das α bestimmt sich im Exsikkator aus folgender Gleichung

$$\alpha = \frac{e(t_0)}{t_\infty - t_0}.$$

Diese Größe muß dabei für Messungen von sehr trockener Luft mit derselben Genauigkeit bestimmt werden, mit welcher man die Luftfeuchtigkeit messen will, für Messungen von mittleren Feuchtigkeiten ist hingegen nur die halbe Genauigkeit nötig. Nicht zu vergessen ist die Ablesung des Barometerstandes.

Um den richtigen α-Wert zu erhalten, wurden nach Schließen des Exsikkatordeckels die α-Werte in Abhängigkeit von der Zeit bestimmt. Es stellte sich stets ein stationäres Minimum der

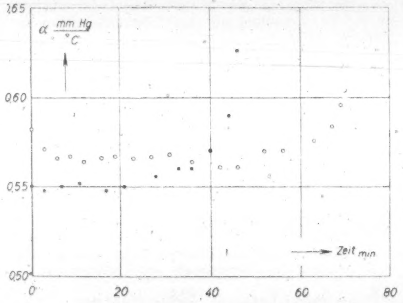

Fig. 1.

α-Werte sehr rasch ein. Nach 30–60 Minuten begannen die α-Werte plötzlich stark zu steigen, ein Zeichen, daß das Wasser am Thermoelement verdampft war. Die Lufttemperatur im Exsikkator änderte sich innerhalb einer halben Stunde um höchstens 0,3° C.

In Fig. 1 sind die α-Werte als Funktion der Zeit zweier solcher Meßreihen aufgetragen. Sie wurden mit demselben Thermoelement an zwei verschiedenen Tagen bei etwa gleichem Luftdruck gemessen. Der Grund, warum sich nicht stets dieselben α-Werte einstellten, ist nicht völlig geklärt. Mit den jeweiligen Minima der α-Werte wurden dann in den darauffolgenden Tagen unter Benutzung der Gleichung (3) einige Feuchtigkeitsbestimmungen durchgeführt, wobei sich innerhalb der Genauigkeitsgrenzen völlige Übereinstimmung mit den Werten ergab, welche mit Hilfe des Aßmannschen Aspirations-Psychrometers gefunden wurden. Im ganzen wurden im Zimmer 19 Feuchtigkeitsbestimmungen zwischen 45 Proz. und 61 Proz. durchgeführt. Die Zimmertemperatur schwankte zwischen 17° C und 20° C. Die mit Hilfe unserer Methode ermittelten relativen Feuchtigkeiten wichen von den mit Hilfe des Aßmannschen Aspirations-Psychrometers bestimmten relativen Feuchtigkeiten im Mittel um 0,5 Proz. ab, wobei sich kein systematischer Fehler ergab. Dieses Abweichen entspricht der Unsicherheit, mit der man die bei unserer Methode und im Aßmannschen Aspirations-Psychrometer verwendeten Quecksilberthermometer ablesen konnte. Vier Messungen seien herausgegriffen und hier im folgenden mitgeteilt.

t	t_0	t'	α	φ	φ'
20,0	15,1	14,9	0,565	0,579	0,58
17,6	13,3	13,2	0,55	0,602	0,61
20,6	14,05	13,8	0,55	0,464	0,46
19,2	14,05	13,8	0,55	0,551	0,55

Die letzte Stelle von φ ist dabei unsicher.

Bei Verwendung genauerer Thermometer und sorgfältiger Versuchsdurchführung dürfte sich die Genauigkeit der Methode aber jedenfalls noch steigern lassen, zumal das Kupfer-Konstantan-Thermoelement für diese Zwecke gar nicht das geeignetste Element sein dürfte. Der Umstand, daß man für die Bestimmung des α-Wertes zu einer Eichung gezwungen ist, hat insofern noch einen Vorteil, weil man auf die Ausschaltung der Wärmezufuhr durch die Thermodrähte nicht so sehr bedacht zu sein braucht und daher auch etwas dickere Drähte verwenden kann.

Göttingen, Kaiser-Wilhelm-Institut für Strömungsforschung, im September 1941.

(Eingegangen 18. September 1941)

NACHRICHTEN

Preise der Planckstiftung und der Deutschen Physikalischen Gesellschaft für physikalische Arbeiten jüngerer deutscher Physiker.

Die Deutsche Physikalische Gesellschaft (DPG.) teilt mit: Es sollen Arbeiten jüngerer deutscher Physiker ausgezeichnet werden, und zwar:

1. Durch die Planck-Stiftung die beste Arbeit aus dem Gebiete der theoretischen Physik (Preis der Planck-Stiftung).
2. Durch die DPG. die beste Arbeit aus dem Gebiet der experimentellen Physik (Preis der DPG.).

Die Gauvereine der DPG. bringen je eine Arbeit für 1. und 2. (der Gauverein Berlin je 2) in Vorschlag, wobei auch Selbstmeldungen an einen Gauverein zu berücksichtigen sind. Die Gauvereine reichen ihre Vorschläge bis zum 31. Dezember 1941 bei der Geschäftsstelle — Berlin-Charlottenburg, Wundtstr. 46 — ein. Es soll sich um eine Arbeit handeln, die innerhalb 6 Jahren nach dem Abschluß des Studiums veröffentlicht wurde. Außerdem soll die Arbeit nach dem 1. Januar 1936 erschienen sein.

Das Schiedsgericht besteht aus den Vorsitzenden der DPG. und den Herren von Laue-Cl. Schäfer für die theoretischen Arbeiten sowie den Herren Gerthsen-Kopfermann für die experimentellen Arbeiten.

Für die vom Schiedsgericht anerkannte beste Arbeit der Gruppen 1 und 2 wird ein Preis von je RM. 1200 ausgesetzt. Dieser Betrag kann, wenn nötig, geteilt werden.

Berlin, den 18. September 1941.

Der Vorsitzende der DPG.
gez. C. Ramsauer

Deutsche Zeitschriften als Kulturträger in der Slowakei. In der Universität Preßburg wird gegenwärtig eine vom Reichsverband der deutschen Zeitschriftenverleger in Verbindung mit der Slowakisch-Deutschen Gesellschaft durchgeführte Ausstellung „Die deutsche Zeitschrift" gezeigt, die mit Ansprachen des slowakischen Ministerpräsidenten Prof. Dr. Tuka, des Leiters des Reichsverbandes der deutschen Zeitschriftenverleger Willi Bischoff und des deutschen Gesandten Obergruppenführer Ludin feierlich eröffnet wurde. Aufgeteilt in 21 Fachgruppen, werden 1200 für die einzelnen Lebens- und Schaffensgebiete besonders repräsentative Unterhaltungs-, Kultur-, Fach- und wissenschaftliche Zeitschriften gezeigt. Eine vom Institut für Zeitungswissenschaft in Berlin beigesteuerte historische Abteilung bildet eine Ergänzung dieser für das geistige und typographische Leistungsvermögen der deutschen Zeitschriftenpresse gleich überzeugungskräftigen Leistungsschau.

Dozenturen: An der Universität Göttingen Fräulein Dr. Helene Braun für Mathematik, an der Technischen Hochschule Darmstadt Dr. Rudolf Gebauer für Experimentalphysik, an der Universität Graz Dr. Georg Kanta für Mathematik, an der Technischen Hochschule Wien Fräulein Dr. Margarete Janke für Organische Chemie, insbesondere Biochemie, an der Universität Leipzig Dr. Horst Müller für Physik, an der Universität Frankfurt a. M. Dr. Franz Wecken für Mathematik.

Ernannt: Der ord. Professor für Darstellende Geometrie an der Technischen Hochschule Prag Dr. Karl Mack zugleich für dasselbe Fach an der Deutschen Karlsuniversität daselbst, der Dozent für Praktische Physik an der Universität Innsbruck Dr. Josef Tagger zum außerplanmäßigen Professor daselbst, der außerplanmäßige Professor an der Hochschule für Bodenkultur in Wien Dr. Robert Herzner zum ord. Professor für Chemie ebendaselbst, der Dozent Dr. Helmuth Stamm zum a. o. Professor für anorganische Chemie an der Universität Halle, der Dozent an der Universität Berlin Dr. Arthur Lüttringhaus zum planmäßigen a. o. Professor für Organische Chemie an der Universität Greifswald, der Dozent an der Universität München Dr. Friedrich Klages zum außerplanmäßigen Professor für Chemie ebenda, der Lehrbeauftragte an der Technischen Hochschule Berlin Ober-Ingenieur Dr. Johannes Bahl zum Honorarprofessor für Elektrische Schiffseinrichtungen ebenda, Professor Dr. Josef Fuhrich zum ord. Professor für Versicherungsmathematik an der Deutschen Universität und Deutschen Technischen Hochschule ebenda.

Ehrung: Oberstudienrat Professor Dr. Bernhard Bavink in Bielefeld wurde zum korrespondierenden Mitglied der Mathematisch-physischen Klasse der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen gewählt.

Gestorben: Der ord. Professor für Vermessungswesen an der Technischen Hochschule Stuttgart Dr. Leo Fritz (gefallen im Osten).

Angebote

Zum möglichst baldigen Eintritt wird gesucht:

Patentbearbeiter

vertraut mit gewerblichem Rechtsschutz, für das Gebiet der Elektroakustik und Tonfilmtechnik

Laboratoriums-Physiker

für neuartige Entwicklungs- u. Forschungsarbeiten, besonders Elektroakustik und Tonfilmtechnik

TOBIS

Tonbild-Syndikat Aktiengesellschaft, Berlin W 62
Budapester Straße 23

Physiker oder Diplom-Ingenieur

für Literaturbearbeitung und Führung einer technisch-wissenschaftlichen Kartei baldmöglichst gesucht. Angebote erbeten an

Forschungsgesellschaft für Funk- und Tonfilmtechnik e. V.
Berlin SW 68, Jerusalemer Straße 59

Verantwortlicher Schriftleiter: i. V. Dr. Ludwig Bewilogua, Berlin. — Für den Anzeigenteil verantwortlich: A. Plohmann, Leipzig. — Verlag S. Hirzel, Leipzig C 1, Königstr. 2. — Druck: Bibliographisches Institut AG., Leipzig. — Zur Zeit gilt Anzeigenpreisliste 3. — Printed in Germany